

ARAŞTIRMA MAKALESİ /RESEARCH ARTICLE

**ÇUBUK SİSTEMLERİN EĞİLME VE BURULMA BURKULMASI İÇİN RİJİTLİK
MATRİSİ HESABI VE KEMERLERE UYGULAMA**

M. Ruhi AYDIN¹

ÖZ

Narin sistemlerdeki iç kuvvetler nedeni ile meydana gelen ikinci mertebe etkiler ilave iç kuvvetlere ve şekil değiştirmelere neden olurlar. Bu ilave iç kuvvet ve şekil değiştirmelerin yakınsak olmaması halinde sistemlerde stabilite sorunları meydana gelir (eğilme burkulması). Ayrıca çubuk eksenine dik doğrultudaki küçük dönmelerin etkisi ile kesitin yanal doğrultuda burularak burkulması da söz konusudur (burulma burkulması). Mühendislikteki ana konulardan biri olan stabilite problemi çok sayıda araştırmacı tarafından incelenmiştir. Özel bazı taşıyıcı sistemler dışında kapalı çözümler üretilmesi güçtür. Bu türdeki sistemler için nümerik çözümlerin geliştirilmesi yararlı olur. Bu çalışmada eğilme ve burulma burkulmalarını bir arada göz önüne alan bir eleman rijitlik matrisi hesabı sunulmuştur. Eğri eksenli veya değişken kesitli gibi sistemlerin burkulma problemlerinin de çubukların sonlu parçalara ayrılarak incelenmesi sureti ile göz önüne alınabilmesi mümkündür. Bu kapsamda 2. derece parabolik kemerlerin eğilme ve burulma burkulmalarına ait bir uygulamaya da yer verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Rijitlik matrisi, Eğilme burkulması, Yanal burkulma, Burulma burkulması, Kemerler.

**STIFFNESS MATRIX CALCULATION OF FLEXURAL AND TORSIONAL BUCKLING
OF FRAME ELEMENTS AND APPLICATION IN ARCHES**

ABSTRACT

Second order effects caused by internal forces in slender systems generate additional internal forces and deflections. Stability problems occur, when the additional internal forces and deflections do not converge (flexural buckling). Furthermore, lateral buckling is also possible due to very small rotations perpendicular to the beam cross-section (lateral torsional buckling). This stability problem has been studied by number of researchers and is one of the main topics in engineering. Except certain types of structures, it is difficult to formulate a closed-form solution. It will be helpful to develop numerical solutions for these systems. In this study, stiffness matrix calculation with respect to both flexural and torsional buckling is presented. Buckling problems in curved or tapered cross-section systems can be analyzed by dividing the beams into finite segments. Within this framework, an application is presented regarding the flexural and lateral torsional buckling in 2nd degree parabolic arches.

Keywords: Stiffness matrix, Flexural buckling, Lateral torsional buckling, Arches.

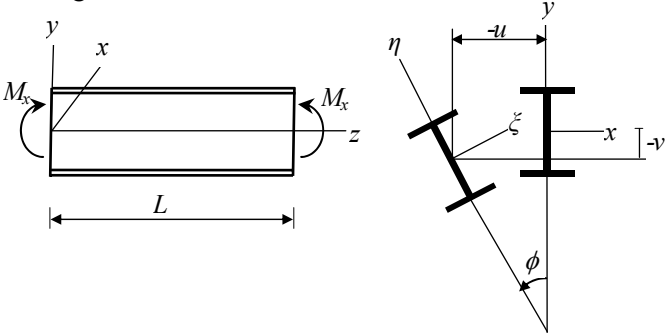
¹ Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Eskişehir.

1. GİRİŞ

Çubuk sistemlerin düzlemleri içinde ve düzlemlerine dik burkulmalarının hesabı için kapalı çözümler çoğu zaman özel sistemler ve yükleme durumları için verilebilir. Genel halde bulunan bir çerçeve sisteminin düzlemi içerisinde (eğilme burkulması) veya düzlemi dışındaki (yanal burulma burkulması) burkulmalarının incelenmesi için matris yöntemleri kullanılarak bir hesap algoritması sunulmaktadır.

2. SABİT EĞİLME MOMENTİ ETKİSİ ALTINDA BULUNAN DOĞRUSAL ÇUBUK ELEMANLARIN YANAL BURKULMASI

Şekil 1. deki gibi iki eksenli simetriye sahip olan ve sabit M_x momenti etkisi altında bulunan bir çubuk elemanının küçük bir ϕ yanal burulma açısı verilmesi halinde elde edilecek diferansiyel denklemi aşağıdaki gibidir. Burada kesitin simetrik olduğu ve I_x atalet momentinin büyük eksen etrafındaki atalet momenti olduğu kabul edilecektir.



Şekil 1. Sabit M_x momenti etkisinde bulunan çubuk elemanı.

$$\frac{d^4 \phi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \frac{M_x^2}{(EI_y)(EC_w)} \phi = 0 \quad (1)$$

(1) Denkleminin genel çözümü Timoshenko and Gere (1961) de verilmiştir.

Geliştirilmek istenen rijitlik matrisinin ilgili elemanlarını elde etmek amacı ile seçilen ik çubuğunda $z=0$ da $\phi = 0$ ve $z=L$ de $\phi = 1$ koşullarını sağlamak üzere

(1) Denklemi için

$$\phi = \frac{1}{\sin \lambda_t L} \sin \lambda_t z \quad (2)$$

fonksiyonu seçilmiştir.

Burada $\alpha = \frac{GJ}{2EC_w}$; $\beta = \frac{M_x^2}{(EI_y)(EC_w)}$ olmak üzere

$$\lambda_t = \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}} \quad (3)$$

değerindedir. α ve β değerlerindeki E elastisite modülü, G kayma modülü, J burulma atalet momenti, C_w çarpılma rijitliğini göstermektedir.

ϕ yanal burulma açısı etkisindeki kirişte burulma momenti $M_t = (GJ) \frac{d\phi}{dz} - (EC_w) \frac{d^3 \phi}{dz^3}$ olduğu da göz önüne alınarak

$$z=0 \text{ da } M_t = \frac{\lambda_t}{\sin \lambda_t L} [(GJ) + (EC_w) \lambda_t^2] \quad (4a)$$

$$z=L \text{ de } M_t = \frac{\lambda_t}{\tan \lambda_t L} [(GJ) + (EC_w) \lambda_t^2] \quad (4b)$$

olarak elde edilir. Şayet bir çelik profilde kesite ait kollar bir noktada kesişiyor ise bu durumda kesite ait C_w çarpılma rijitliği sıfır olarak alınabilir. Bu durum için (1) Denkleminin yeni şekli aşağıdaki gibi olur.

$$(GJ) \frac{d^2 \phi}{dz^2} + \frac{M_x^2}{EI_y} \phi = 0 \quad (5)$$

$z=0$ da $\phi = 0$ ve $z=L$ de $\phi = 1$ koşullarını sağlamak üzere (5) Denklemi için gene (2) Denklemi seçilebilir.

$M_t = (GJ) \frac{d\phi}{dz}$ olduğu da göz önüne alınırsa

$$z=0 \text{ da } M_t = \frac{\lambda_t (GJ)}{\sin \lambda_t L} \quad (6a)$$

$$z=L \text{ de } M_t = \frac{\lambda_t (GJ)}{\tan \lambda_t L} \quad (6b)$$

olarak elde edilir. Bu hal için

$$\lambda_t = \sqrt{\frac{M_x^2}{(GJ)(EI_y)}} \quad (7)$$

değerindedir.

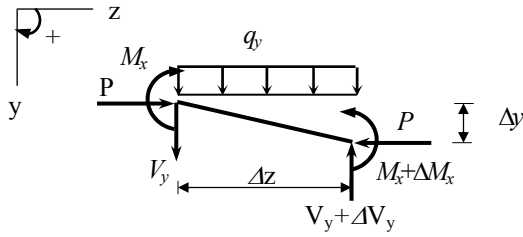
3. SABİT EKSENEL KUVVET ETKİSİ ALTINDA BULUNAN DOĞRUSAL ÇUBUK ELEMANLAR

Eksenel kuvvet etkisi altında bulunan bir elemanda doğrusal davranış özelliği geçerli değildir ($P-\Delta$ etkisi), bu durumda süperpozisyon yapılamaz. Süperpozisyon kuralının geçerli olmaması analizi güçleştirir. Ancak çubuktaki eksenel kuvvetin sabit olarak kabul edilmesi halinde yükler ve uç şekil değiştirmeleri toplanabilir. Şöyle ki: Sabit eksenel kuvvet bir parametre olarak kabul edilip buna bağlı olarak eğilme rijitlikleri saptanabilirse bu rijitliklere göre sistemlerin analizi yapılabilir.

x eksenine dik momentlerin etkisi altında bulunan Şekil 2. deki çubuk elemanında düşey denge ve sağ uca göre moment denge koşulları yazılır ve $\Delta z \rightarrow 0$ için ifadeler düzenlenirse (İnceleme kolaylığı bakımından yz düzlemindeki pozitif dönüş açısının Şekil 2. de gösterildiği yönde olabilmesi için y eksenini aşağıya doğru seçilmiştir.)

$$\frac{dV_y}{dz} = -q_y \quad (8)$$

$$\frac{dM_x}{dz} = V_y + P \frac{dy}{dz} \quad (9)$$



Şekil 2. Basınç kuvveti etkisindeki Δz elemanı uç kuvvet ve yer değiştirmeleri.

(9) Denklemimin bir kere daha türevi alınır ve

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = -EI_x \frac{d^4 y}{dz^4} \text{ olduğu da göz önüne alınarak (8)}$$

Denklemini ile birleştirilirse,

$$\frac{d^4 y}{dz^4} + \frac{P}{EI_x} \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{q_y}{EI_x} \quad (10)$$

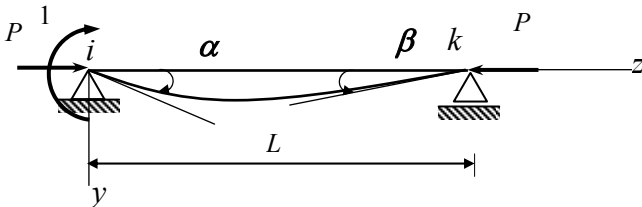
Burada

$$\lambda_x = L \sqrt{\frac{P}{EI_x}} \quad (11)$$

olmak üzere $q_y=0$ için (10) Denklemimin çözümü

$$y = C_1 \sin \lambda_x \frac{z}{L} + C_2 \cos \lambda_x \frac{z}{L} + C_3 z + C_4 \quad (12)$$

Şekil 3. deki sabit bir P eksenel yükünün etkisi altında bulunan yz düzlemindeki ik basit kirişinin i ucuna birim moment etki etmesi halinde meydana gelecek olan uç dönüş açıların hesabı yapılmak istenirse bu hale ait sınır şartları kullanılarak elde edilen C integral sabitleri aşağıda gösterilmiştir.

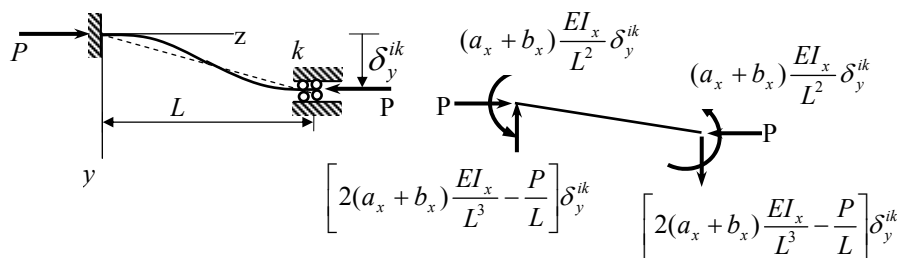


Şekil 3. Eksenel kuvvet etkisindeki basit kirişte birim moment etkisi ve uç dönüş açıları.

$$C_1 = -\frac{1}{EI_x} \frac{L^2 \cos \lambda_x}{\lambda_x^2 \sin \lambda_x}, C_2 = \frac{1}{EI_x} \frac{L^2}{\lambda_x^2}, C_3 = \frac{1}{EI_x} \frac{L}{\lambda_x^2}, C_4 = -C_2 \quad (13)$$

Basit kirişin i ve k mesnetlerindeki dönüş açıları,

$$\alpha = \frac{1}{EI_x} \frac{L \sin \lambda_x - \lambda_x \cos \lambda_x}{\lambda_x^2 \sin \lambda_x}, \beta = -\frac{1}{EI_x} \frac{L \lambda_x - \sin \lambda_x}{\lambda_x^2 \sin \lambda_x} \quad (14)$$



Şekil 5. Basınç etkisindeki çubukta δ_y^{ik} görelî yer değiştirmesi ve uç kuvvetleri.

ik kirişinin mesnetlerinde etki eden momentler M_i ve M_k olsun bu momentler ile birim moment için bulunan dönüş açıları çarpılırsa i ve k mesnetlerindeki sonuç φ_i ve φ_k uç dönüş açıları bulunur.

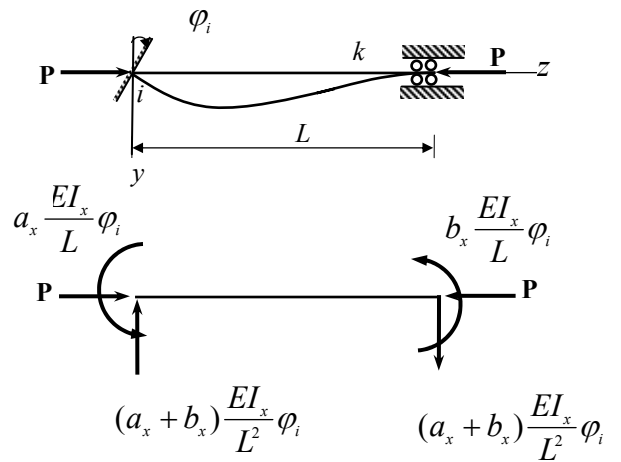
$$\varphi_i = M_i \alpha + M_k \beta, \varphi_k = M_k \alpha + M_i \beta \quad (15)$$

(15) Denkleminden ankastre kiriş çubuk uç kuvvetleri ve şekil değiştirmeler arasındaki bağıntıları elde etmek üzere, $\varphi_i \neq 0$ ve $\varphi_k = 0$ hali için bu denklemler çözülürse $\Delta_x = 2 - 2 \cos \lambda_x - \lambda_x \sin \lambda_x$ olmak üzere,

$$M_i = \frac{\lambda_x (\sin \lambda_x - \lambda_x \cos \lambda_x)}{\Delta_x} \frac{EI_x}{L} \varphi_i = a_x \frac{EI_x}{L} \varphi_i \quad (16a)$$

$$M_k = \frac{\lambda_x (\lambda_x - \sin \lambda_x)}{\Delta_x} \frac{EI_x}{L} \varphi_i = b_x \frac{EI_x}{L} \varphi_i \quad (16b)$$

Sonuç uç kuvvetleri (Şekil 4.) de özetlenmiştir.



Şekil 4. Basınç eksenel kuvveti etkisindeki ankastre kirişte φ_i^i uç dönmesi ve uç kuvvetleri

Çubukta δ_y^{ik} Görelî Yer Değiştirme Olması Hali

ik cubuğunda δ_y^{ik} görelî yer değiştirmesinin sıfırdan farklı olması halinde uç kuvvetleri Şekil 5 de gösterilmiştir.

Not: y eksenine dik momentler etkisinde bulunan bir çubuk için (Şekil 4. ve 5.) de görülen a_x ve b_x katsayıları a_y ve b_y olarak göz önüne alınacak ve ifadelerdeki x indisi y indisi ile yer değiştirecektir.

4. RİJİTLİK MATRİSİ HESABI

Uzayda herhangi bir konumda olan bir *ik* çubuğunda çubuk eksenini ile eleman eksen takımının *z* ekseninin aynı olduğu ve *yz* düzleminin büyük rijitlik düzlemi olduğu koşulları ile söz konusu çubuğa ait rijitlik matrisi aşağıdaki gibi olur. Eleman eksen takımı olarak Şekil 1 deki eksen takımı seçilmiştir.

$$\begin{Bmatrix} \{F_i\} \\ \{F_k\} \end{Bmatrix} = [K]_{(12 \times 12)} \begin{Bmatrix} \{u_i\} \\ \{u_k\} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{Bmatrix} F_x^i \\ F_y^i \\ F_z^i \\ M_x^i \\ M_y^i \\ M_z^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x^k \\ F_y^k \\ F_z^k \\ M_x^k \\ M_y^k \\ M_z^k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x^i \\ u_y^i \\ u_z^i \\ \phi_x^i \\ \phi_y^i \\ \phi^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x^k \\ u_y^k \\ u_z^k \\ \phi_x^k \\ \phi_y^k \\ \phi^k \end{Bmatrix} \quad (18)$$

K matrisi:

$$[K] = \begin{bmatrix} G & 0 & 0 & 0 & F & 0 & -G & 0 & 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & B & 0 & -A & 0 & 0 & 0 & -B & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & 0 & C & 0 & 0 & 0 & A & 0 & D & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 & 0 & H & 0 & -F & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N \\ -G & 0 & 0 & 0 & -F & 0 & G & 0 & 0 & 0 & -F & 0 \\ 0 & -B & 0 & A & 0 & 0 & 0 & B & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & 0 & D & 0 & 0 & 0 & A & 0 & C & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 & 0 & I & 0 & -F & 0 & 0 & 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$A = \frac{(a_x + b_x)}{L^2} EI_x; B = \frac{2(a_x + b_x)}{L^3} EI_x - \frac{P}{L}; C = a_x \frac{EI_x}{L};$$

$$D = b_x \frac{EI_x}{L}; F = \frac{(a_y + b_y)}{L^2} EI_y; G = \frac{2(a_y + b_y)}{L^3} EI_y - \frac{P}{L};$$

$$H = a_y \frac{EI_y}{L}; I = b_y \frac{EI_y}{L}; K = \frac{EA}{L};$$

$$C_w \neq 0 \text{ için } M = \frac{\lambda_t}{\sin \lambda_t L} (GJ + \lambda_t^2 EC_w);$$

$$N = \frac{\lambda_t}{\tan \lambda_t L} (GJ + \lambda_t^2 EC_w)$$

$C_w = 0$ İçin

$$M = \frac{\lambda_t (GJ)}{\sin \lambda_t L}; N = \frac{\lambda_t (GJ)}{\tan \lambda_t L}$$

olmak üzere *a* ve *b* değerleri (16) Denklemlerine uygun indisler yerleştirilerek hesaplanacaktır. λ_t değerleri (3) veya (7) Denklemlerinden hesaplanırlar.

5. BURKULMA HESABI

Verilen herhangi bir 3 boyutlu çerçeve sisteminde yükler adım adım artırılarak hesaplanacak olan iç kuvvetler ve (17-18-19) Denklemleri kullanılarak her adım için sistem rijitlik matrisi hesaplanır. Bu matris kurulurken bir çubuk elemanındaki eksenel kuvvet ve moment değeri olarak ortalama değeri seçilir. Bir çubukta eksenel kuvvet ve moment fazla farklı ise o çubuğun sonlu sayıda elemana bölünmesi gerekebilir. Bu eksenel kuvvet ve momentler dış yükten meydana gelmekle beraber önceki bölümlerde açıklandığı gibi artık elemanların bir parametresi olarak (17) Denklemlerinde göz önüne alınmaktadır. Daha sonra sistemin burkulma modu tahmin edilir ve bu moda uygun olarak sisteme yüklenecek çok küçük kuvvet ve/veya momentler etkisi altında bunların doğrultusunda meydana gelecek olan şekil değiştirmeler hesaplanır. İç kuvvetlerin belirli bir konumu için eğilme veya burulma burkulması durumlarından herhangi birinin meydana gelmesi halinde uygulanan çok küçük kuvvet ve/veya momentler doğrultusunda büyük şekil değiştirmeler ve salınımlar meydana gelir. Bu konuma ait olan (17) Denklemlerindeki dış yük düzeyi sistemin burkulma yüklerini oluşturur.

5.1 KEMERLERİN BURKULMASI

Kemerlerin eğilme ve burulma burkulması inşaat mühendisliğinin önemli bir konusunu oluşturur. (1981) ve Qaqish ve Haddadin (1992) dairesel kemerlere ait geliştirdikleri rijitlik matrisleri ile burkulma problemlerini araştırmışlardır. Bu konu ile ilgili olarak Bradford ve Pi (2002, 2005a, 2005b), Pi ve Trahair (1998, 1999) in çalışmalarında dairesel kemerlerin eşit basınç, tekil yükler, kısmi olarak yayılı üniform yük halleri için eğilme ve burulma burkulmaları detaylı olarak incelenmiş ve sonuçlarının yorumu ile uygulamaya yönelik öneriler geliştirilmiştir. Davies (2005) çalışmasında kemerlerin malzeme davranışlarını da analize katarak çelikte pekleşmeli ve plastik davranışlar için yerel ve burulma burkulmalarını incelemiştir. Bu nedenle çok sayıda araştırmacının ilgisini çekmiştir. Timoshenko and Gere (1961) dairesel ve parabolik kemerlerin değişik yük koşullarında eğilme burkulmalarını araştırmışlardır. Doğru eksenli kirişlere ait burulma burkulması da aynı çalışmada bulunmaktadır. Rubin (2004) basık kemerlerin simetrik burkulmasını deneysel ve analitik yolla inceleyerek sonuçlarını yorumlamıştır. Wen ve Lange

Önceki bölümlerde sunulan doğru eksenli çubuklara ait rijitlik matrisi eğri eksenli çubukların küçük parçalara ayrılarak her birinin doğru eksenli imiş gibi kabul edilmesi ile uygulanabilir. Bu konuda sunulan algoritmanın yakınsama durumunu kontrol etmek için daha önce yapılmış çalışmalarla sunulan çalışmanın sonuçları aşağıdaki tablo. da özetlenmiştir.

Kemer yükleme ve mesnet durumu								
Kemer özellikleri burkulma tipi	2. parabol, Eğilme $L=10\text{ m } f=5\text{ m}$ $I_x=98 \times 10^{-6}\text{ m}^4$ $E=200 \times 10^6\text{ kN/m}^2$ $A=6.9 \times 10^{-3}\text{ m}^2$	Daire, Eğilme $R=318.2\ 2\alpha=\pi/2$ $I_x=2.03125$ $E=4.176 \times 10^6$ $A=2.7$	2. parabol, Burulma $L=450\text{ m } f=90$ $I_x=32.5\ I_y=4.45$ $J=5.785\ C_w=0$ $E=4.176 \times 10^6$ $A=6.9 \times 10^{-3}\text{ m}^2$	Daire, Eğilme $R=30\ 2\alpha=\pi/2$ $I_x=0.8789 \times 10^{-2}$ $E=1 \times 10^7$ $A=0.1875$				
Sunulan çalışma Eleman sayısı ve q	20 16 12 8	752 754 758 771	20 16 12 8	4.35 4.35 4.35 4.40	20 16 12 8	7.75 7.65 7.65 7.60	20 16 12 8	51.5 51.5 51.5 51.5
Wen and Lange (1981) Eleman sayısı ve q			24 16 12 8	4.37 4.37 4.37 4.37	24 16 12 8	7.89 7.36 7.36 7.37	24 16 12 8	51.67 51.67 51.68 51.71
Kesin değerler	752.6		4.17		7.89		48.83	

Not: Kesin değerler Wen and Lange (1981) dan aktarılmıştır.

2. derece parabolik kemerler

Eğilme burkulması

Şekil 6. daki gibi 2. derece parabol kemerlerin sabit ve ankastre mesnet hali ve üniform yayılı ve ortasında etki eden tekil yük halleri için kritik burkulma yüklerinin bulunması önceki bölümlerde sunulan algoritma yardımı ile analiz edilerek sonuçları aşağıda sunulmuştur.

Sonlu sayıda elemana bölünerek hesaplanacak olan kemerde verilen q yayılı yükü ve F tekil yükü her adımda belirli miktarda artırılarak kemere ait iç kuvvetler hesaplanır. Bulunan eksenel kuvvet ve moment değerlerinin ortalaması her bir kemer bölgesinde sabit kabul edilerek (17) Denklemleri ile eleman rijitlik matrisleri kurularak sistemin çözümü yapılır. Simetrik yüklü kemerler antisimetrik burkulma moduna sahiptirler. Bu duruma uygun olarak Şekil 6. daki gibi kemerin $1/4$ ve $3/4$ noktalarına antisimetrik $F_Y=0$ fiktif kuvvetleri uygulanmalıdır.

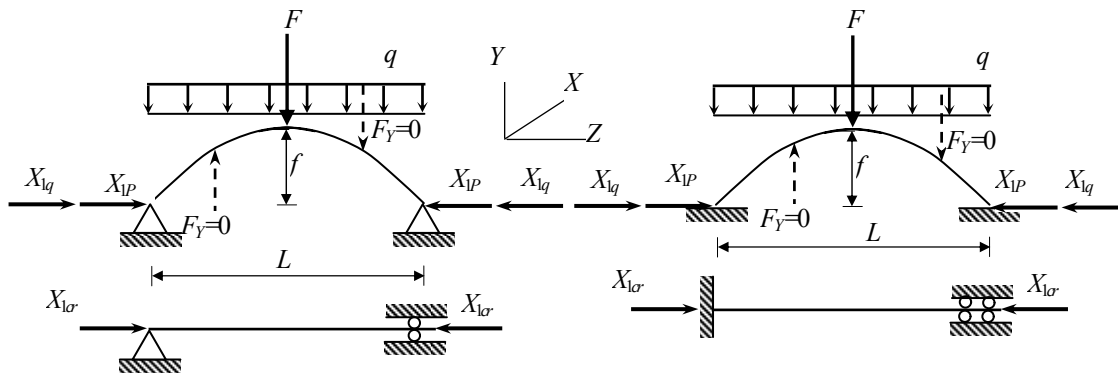
Gerçekte $F_Y=0$ kuvveti yerine çok küçük kuvvetler uygulanırlar. Bu fiktif kuvvetler doğrultusunda önceki bölümlerde açıklandığı üzere aşırı şekil değiştirmelerin ve salınımların meydana geldiği dış yük düzeyi araştırılır. Bir başka deyişle bu durumun meydana geldiği q ve F yükleri kritik burkulma yükleridir

Yukarıda verilen algoritma sonucu ulaşılan burkulma konumunda mesnette meydana gelen yatay X_1 kuvvetinin aynı açıklık ve mesnet koşullarındaki doğru eksenli çubuğtaki X_{1cr} Euler kritik burkulma yüküne oranı,

$$\alpha_q = \frac{X_{1q}}{X_{1cr}} \tag{20a}$$

$$\alpha_p = \frac{X_{1p}}{X_{1cr}} \tag{20b}$$

olarak tanımlanabilir. α_q ve α_p değerleri kemerin mesnet ve yükleme durumuna bağlı olarak hesaplanırsa X_{1q} ve X_{1p} yatay mesnet kuvvetleri (20) Denklemlerinden elde edilebilir. α_q ve α_p değerleri kemerin mesnetlenme durumuna göre aşağıdaki Tablo 1. de sunulmuştur.



Şekil 6. 2.derece parabol eksenli kemer, boyutlar, yükleme durumu, yatay mesnet kuvvetleri ve L açıklığındaki çubuğun Euler burkulma yükü.

Şekil 6. daki mafsallı mesnet olan sistemde $X_{1cr} = \pi^2 \frac{EI_x}{L^2}$, ankastre mesnet olan sistemde, $X_{1cr} = \pi^2 \frac{EI_x}{(0.7L)^2}$ değerindedir.

(20) Denklemlerinden hesaplanacak X_{1q} ve X_{1P} yatay mesnet kuvvetlerini meydana getirecek olan kritik yayılı yük değeri aşağıdaki gibidir.

$$q_{cr} = \frac{8X_{1q}f}{L^2} \quad (21)$$

Benzer şekilde açıklık ortasında etki eden kritik düzey tekil yük sabit ve ankastre mesnet halinde $\frac{f}{L}$ oranına bağlı olarak aşağıdaki gibidir.

$$F_{cr} = \frac{X_{1P}}{\gamma_P} \quad (22a)$$

(22a) Denklemi ile ifade edilen γ_P katsayıları aşağıdaki Tablo 2. de sunulmuştur.

Tablo 1. 2. derece parabol kemerde üniform yayılı ve orta kesitte etki eden tekil yük için α_q ve α_p değerleri (Denklem 20a ve b)

f/L	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
α_q sabit mesnet	3.687	2.925	2.094	1.431	0.972	0.671	0.475	0.344	0.256	0.194
α_q ankastre mesnet	3.784	3.201	2.484	1.823	1.307	0.936	0.679	0.501	0.377	0.289
α_p sabit mesnet	3.725	3.036	2.255	1.586	1.107	0.774	0.554	0.404	0.302	0.230
α_p ankastre mesnet	3.796	3.261	2.589	1.962	1.442	1.057	0.779	0.583	0.441	0.341

Tablo 2. 2. derece parabol kemerde orta kesitte etki eden tekil yük için (22a) Denklemdeki γ_P katsayıları tablosu

f/L	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
γ_P sabit mesnet	1.950	0.970	0.643	0.478	0.380	0.313	0.267	0.233	0.206	0.184
γ_P ankastre mesnet	2.330	1.155	0.760	0.565	0.446	0.368	0.313	0.273	0.240	0.215

F_{cr} değerleri yukarıdaki Tablo 2. deki katsayılarından yararlanılarak hesaplanabileceği gibi iyi bir yaklaşıklıkla aşağıdaki denklemlerden de elde edilebilir.

$$\text{Sabit mesnet için } F_{cr} = \frac{X_{1P}f}{0.189L} \quad (22b)$$

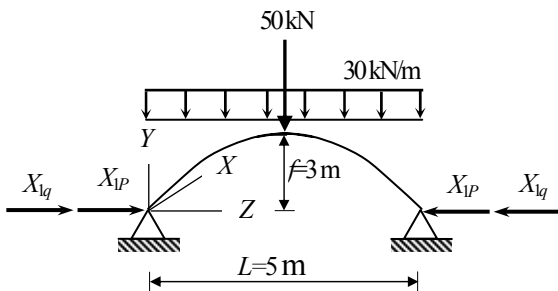
$$\text{Ankastre mesnet için } F_{cr} = \frac{X_{1P}f}{0.223L} \quad (22c)$$

Sayısal örnek

Şekil 7. de boyutları ve yükleme durumu verilen 2. derece parabol eksenli kemerde burkulma meydana getiren yük katsayısının hesabı istenmektedir. Veriler şöyledir:

Çelik I profili $E=200 \times 10^6$ kN/m², $I_x=98 \times 10^{-6}$ m⁴, $I_y=4.51 \times 10^{-6}$ m⁴, $J=0.487 \times 10^{-6}$ m⁴

$A=6.90 \times 10^{-3}$ m², $C_w=91.85 \times 10^{-9}$ m⁶



Şekil 7. Sayısal örnek boyutlar ve yükleme durumu.

Örnekte hem üniform yayılı hem de tekil yük bir arada olduğundan bunlara ait etkin α_{ef} katsayısının hesabı gerekir,

$P=50$ kN için $X_{1P}=0.189 \times 50 \times 5/3=15.75$ kN, Denklem (22b)

$q=30$ kN/m için $X_{1q}=30 \times 5^2/(8 \times 3)=31.25$ kN Denklem (21)

Tekil ve üniform yayılı yükün birlikte etki etmesi hali için etkili α_{ef} değeri

$$\alpha_{ef} = \frac{X_{1P}\alpha_p + X_{1q}\alpha_q}{X_{1P} + X_{1q}} = \frac{15.75 \times 0.774 + 31.25 \times 0.671}{15.75 + 31.25} = 0.706$$

Euler burkulma yükü verilen mesnet koşulları için

$$X_{1cr} = \pi^2 \frac{EI_x}{L^2} = 7730 \text{ kN}$$

(20) Denkleminden $X_1=0.706 \times 7730=5457$ kN Yük çarpanı $YÇ$

$$YÇ = \frac{5457}{31.25 + 15.75} = 116.1 \text{ olarak bulunur.}$$

Burulma burkulması

Burulma burkulması halinde Şekil 6. daki $F_y=0$ fiktif kuvvet grubu yerine kemerin tepe noktasına Z eksenine dik $M_z=0$ fiktif momenti etki ettirilir ve bu moment doğrultusundaki dönüş açıları için yukarıda verilen hesap yöntemi uygulanır. Kemer mesnetlerinin çatal mesnet olduğu yani Z eksenini etrafında dönüş açılarının sıfır olduğu kabul edilmiştir.

Şekil 7. de verilen ve eğilme burkulması için yük çarpanı bulunan kemerin burulma burkulması için yük çarpanı hesaplanmış ve $YÇ=2.15$ olarak bulunmuştur.

Aynı sistem orta kesitte yanal harekete karşı tutulu olursa $YÇ=12.9$ olmaktadır. Tutulu halde yük çarpanı 6 kat artmaktadır.

6. SONUÇ

Çubuk sistemlerin burkulma problemi inşaat mühendisliğinin önemli bir konusudur. Sunulan rijitlik matrisi ile doğru eksenli çubukların eğilme ve burulma burkulmaları bir arada incelenebilmektedir. Eğri eksenli ve değişken kesitli çubuklar ise sonlu sayıda elemanlara bölünerek sunulan matris yöntemi ile analiz edilebilir. Sonlu sayıda elemana bölerek analiz yarım ve yarıya yakın daire kemerlerde istenilen yaklaşıklık ile çözüm vermemektedir. Bunun sebebi yatayda eşit aralıklara bölünen daire kemerin yay uzunluklarının birbirinden oldukça farklı olmasıdır. Bu sakınca 2α açısı $\pi/2$ ve daha az olan kemerlerde ortadan kalkmaktadır.

KAYNAKLAR

- Bradford, M.A. ve Pi Y.L. (2002). Elastic Flexural-Torsional Buckling of Discretely Restrained Arches. *ASCE Journal of Structural Engr.* 128, 6.
- Bradford, M.A. ve Pi Y.L. (2005a). Out-of-Plane Strength Design of Fixed Steel I-Section Arches, *ASCE Journal of Structural Engr.* 131, 4.
- Bradford, M.A. ve Pi Y.L. (2005b). Flexural Torsional Buckling of Fixed Steel Arches Under Uniform Bending. *Journal of Constructional Steel Research* 62(2006) 20-26.
- Davies, J.M. (2005). Strain Harding Local Buckling and Lateral-Torsional Buckling in Plastic Hinges, *Journal of Constructional Steel Research* 62(2006) 27-34.
- Ghali, A ve Neville, A.M. (1983). *Structural Analysis*, Chapman and Hall, New York.
- Pi, Y.L. ve Trahair, N.S. (1998). Out of Plane Inelastic Buckling and Strength of Steel Arches. *ASCE Journal of Structural Engr.* 124, 2.
- Pi, Y.L. ve Trahair, N.S. (1999). In Plane Buckling and Design of Steel Arches. *ASCE Journal of Structural Engr.* 125,11.
- Qaqish, S. ve Haddadin A. (1992). Buckling Behavior of Elastic Circular Arches , *ASCE Journal of Engrg. Mechanics.* 117, 11.
- Rubin, M.S. (2004). Buckling of Elastic Shallow Arches Using the Theory of a Cosserat Point. *ASCE Journal of Engrg. Mechanics.* 130, 2.

Timoshenko, S. M. ve Gere (1961). *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill Company, New York

Wen, R.K. ve Lange, (1981). Curved Beam Element For Arch Buckling Analysis *ASCE Journal of Structural Division.* 107,2053-2069.



M. Ruhi AYDIN, 1967 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesinden İnşaat Yüksek Mühendisi olarak mezun oldu. 1972 yılına kadar askerlik görevi özel sektör ve kamu sektöründe çalıştıktan sonra Eskişehir DMMA na asistan olarak katıldı. Aynı kurumda yeterlik çalışması yaptı ve doçentlik ünvanını aldı. 1987 yılında Anadolu Üniversitesinde profesör oldu. 1993 yılından itibaren de Eskişehir Osmangazi Üniversitesinde görev yapmaktadır. Yurt içi ve yurt dışında hakemli dergilerde yayınlanmış çalışmaları ve ders kitapları vardır. Değişik kongre ve konferanslara bildiri ile katılmış bir kısım sempozyum ve teknik kong-relerin bilim kurulu üyeliği ve başkanlığını yapmıştır. Görev yaptığı kurumlarda Bölüm başkanlığı, Akademi başkan yardımcılığı, Rektör yardımcılığı ve bir dönem üniversiteler arası kurul üyeliği yapmıştır.