ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.:10-Sayı/No: 2 : 355-366 (2009)

ARAŞTIRMA MAKALESİ /**RESEARCH ARTICLE**

TEK DEĞİŞKENLİ KARARLI DAĞILIMLAR, PARAMETRELEMELERİ VE MENKUL KIYMET FİYATLARI DAVRANIŞI ÜZERİNE BİR UYGULAMA

Filiz KARDİYEN [1]

ÖZ

Ticaret, ekonomi ve davranışsal biyoloji, fizik ve sosyal bilimler gibi birçok uygulama alanında artan bir ilgiyle kullanılmakta olan dağılımların kararlı ailesi, olasılık dağılımlarının çarpıklık ve kalın kuyruklara olanak tanıyan ve birçok cazip matematiksel özelliklere sahip zengin bir sınıfıdır. Kararlılık; bağımsız, aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin toplamları için limit kuralları verdiğinden önemli bir özelliktir. Özellikle, çeşitli marketlerde finansal varlıklara ait fiyat değişimlerinin dağılımında kalın kuyruk veya basıklık gözlenmesi, kararlı dağılımların finans çevresinde büyük ilgi görmesine neden olmuştur. Bu çalışmada, tek değişkenli kararlı dağılımlar, tanım ve özellikleriyle ayrıntılı bir şekilde tanıtılmış ve bu dağılımların literatürde yer alan parametrelemeleri ile bu parametrelemelerin özelikleri verilmiş, McCulloch'un Yüzdelik Tekniği ile parametre tahmini tanıtılmıştır. Ayrıca, bu tür dağılımlar için iyi örnek oluşturması bakımından İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında işlem gören bir hisse senedinin getirilerine ait kararlı dağılım parametre tahminleri ve dağılım fonksiyonları incelenmiştir. İncelemeler sonucunda, deneysel dağılımın, teorik dağılıma oldukça iyi uyum sağladığı gözlenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Kararlılık, Kararlı dağılım, Kararlı parametreleme, Hisse senedi.

UNIVARIATE STABLE DISTRIBUTIONS, THEIR PARAMETRIZATIONS AND AN APPLICATION ON THE BEHAVIOUR OF THE STOCK PRICES

ABSTRACT

Stable distributions, a rich class of probability distributions that allow skewness and heavy tails and have many intriguing mathematical properties, have been extensively used in many application fields like business, economics, behavioral biology, physics and social sciences. Stable laws are an important feature because they give limiting laws for sums of independent, identically distributed random variables. Heavy tailed or leptokurtic character of distribution of price changes observed in various markets make stable distribuitons more attractive especially in economics. In this study, univarite stable distribuitons are introduced in detailed with their definitions and features and McCulloch's Quantile Technique is also described for parameter estimation. In addition, parametrizations of these distributions defined in literature and characteristics of these parametrizations are given. Since it is the best sample for these kind of distributions, stable parameter estimations and distribution functions of returns of a stock from the İstanbul Stock Exchange are examined. Emprical results indicate that empirical distribution gives a very good fit to the theoretical distribution.

Keywords: Stability, Stable distribution, Stable parametrization, Stock.

[1,] Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Teknikokullar- Beşevler ANKARA.
Fax:03122122279, e-posta: fyuva@gazi.edu.tr

Geliş: 18 Nisan 2007; **Düzeltme:** 19 Temmuz 2007; **Kabul:** 11 Aralık 2007

1. GİRİŞ

Kararlı dağılımlar, olasılık dağılımlarının çarpıklık ve kalın kuyruklara olanak tanıyan ve bir çok cazip matematiksel özelliklere sahip zengin bir sınıfıdır. Bu sınıfı 1920'lerde Paul Levy bağımsız ve aynı dağılımlı terimlerin toplamlarıyla çalışmasında tanımlamıştır. Kararlı dağılımlar, özellikle birçok ilginç niceliğin, rasgele değişkenlerin toplamı şeklinde ifade edildiği ekonomide olmak üzere veri modelleri olarak yaygın olarak kullanılmaktadır. Kararlı dağılımlar, birçok uygulama alanında ilgi konusu olmuştur. Örneğin, Holtsmark, astronomide yerçekimiyle ilgili alanları modellemede kararlı dağılımları uygulamıştır. Ayrıca, ticaret ve ekonomide spekülatif menkul kıymetlerin fiyat değişimleriyle ilgili olasılık kuralları için bir model elde etme sürecinde de kararlı dağılımların kullanılmaları önerilmiştir (Press, 1972a) .

Kararlı sınıfın birkaç üyesi dışında, yoğunluk ve dağılım fonksiyonlarının kapalı formunun olmayışı deneysel çalışmalarda bir güçlük olarak araştırmacıların karşısına çıkmaktadır (Fama ve Roll, 1971). Ancak kararlı dağılımların yoğunluk ve dağılım fonksiyonlarını ve yüzdeliklerini hesaplayan güvenilir bilgisayar programları mevcuttur ve bu programlarla birçok pratik problem için kararlı model kullanmak mümkün olmaktadır (Nolan, 2005).

Kararlılık kuralları analitik olması ve bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin toplamları için tek mümkün limit kuralları olması bakımından büyük öneme sahiptir. Dağılımların kararlı ailesi, ticaret, ekonomi ve davranışsal biyoloji, fizik ve sosyal bilimler uygulamalarında artan bir ilgiyle kullanılmaktadır.

Önceleri, kuyruklara uzak birtakım gözlemlerin aykırı değer olarak çıkarılması nedeniyle birçok sürecin yaklaşık normal oldukları düşünülürdü. Ancak, bütün gözlemler elde tutulduğunda birçok süreçte kuyruklarda normal dağılımdan daha fazla olasılık kümelenir. Bu tür kalın kuyruk davranışı, kararlı normal olmayan dağılımların ve diğer bazı dağılımların tipik özelliğidir. Sürecin davranışının kararlı dağılım ile açıklanmasının avantajı, değişkenlerin doğrusal bileşenlerinin kararlı dağılım varsayımı altında analiz edilmesinin daha kolay olmasıdır (bu her zaman geçerli değildir). Birkaç tane bağımsız kararlı değişken söz konusu olduğunda çok değişkenli kararlı dağılımlar gerekmektedir (Press,1972b).

Bu çalışmanın amacı, birçok alanda cazip özellikleri bakımından pek çok çalışmaya konu olmuş ve veri modeli olarak sıkça kullanılan kararlı dağılımları tanıtmak ve güncel verilere uygulanabilirliğini göstermektir. Bu amaçla, tek değişkenli kararlı dağılımlar ayrıntılı bir biçimde özellikleri ile ele alınmıştır. Birinci Bölümde, kararlılık tanımları ve tek değişkenli kararlı dağılımların parametre özelliklerine yer verilmiştir. Kararlı dağılımları tanımlamada literatürde çok sayıda parametreleme kullanılması nedeniyle bu konuda ciddi bir karmaşa söz konusudur. Bu nedenle, çalışmanın ikinci bölümünde kararlı dağılımları en iyi tanımladığı ve kolay yorumlanabildiği düşünülen iki parametreleme ve bu parametrelemelerin kararlı değişkenlerin toplamlarıyla ilgili özellikleri verilmiştir. Çalışmanın dördüncü bölümünde, kararlı dağılımlar için geliştirilmiş parametre tahmin yöntemlerinden McCulloch'un Yüzdelik Tekniği tanıtılmıştır. Son bölümde ise, güncel veriler ile bir uygulama çalışması yapılmıştır. İstanbul Menkul Kıymetler Borsasın'da işlem gören bir hisse senedine ait yüz aylık getiri verisi ele alınmış ve verinin dağılım özellikleri incelenmiştir.

2. TEK DEĞİŞKENLİ KARARLI AİLENİN TANIMLARI VE TEMEL ÖZELLİKLERİ

2.1 Tanımlar

2.1.1 Tanım

Eğer $b_1 > 0, b_2 > 0$ ve c_1, c_2 gerçek sayıları için

$$F\left(\frac{x-c_1}{b_1}\right) * F\left(\frac{x-c_2}{b_2}\right) = F\left(\frac{x-c}{b}\right) \tag{1}$$

(1) eşitliğini sağlayan b pozitif sayısı ve bir gerçek sayı c var ise, $F(x)$ dağılım fonksiyonu kararlıdır denir. Burada * işlemi konvolüsyon işlemidir. Genelde eğer F_1 ve F_2 , f_1, f_2 yoğunluklu sürekli birikimli dağılım fonksiyonları iseler, konvolüsyonları eşitlik (2)'deki gibi ifade edilir

$$F(x) = F_1(x) * F_2(x) \tag{2}$$

ve şöyle tanımlanır:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-t)\, f_2(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x-t)\, f_1(t)\, dt \tag{3}$$

Bu tanım aşağıdaki tanım ile denktir:

F birikimli dağılım fonksiyonuna sahip X ve Y bağımsız olsunlar. Her $b_1 > 0, b_2 > 0$ çifti için, $Z \equiv (b_1 X + b_2 Y + c)/b_3$ te yine aynı F birikimli dağılım fonksiyonuna sahip olacak şekilde bir $b_3 > 0$ ve bir c var ise, F kararlıdır.

Her iki tanıma göre de, bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin doğrusal fonksiyonlarının toplamı yine aynı dağılım ailesine ait ise, bu aile kararlıdır denir. Örneğin, normal dağılım bu özelliği sağlamaktadır, dolayısıyla kararlı ailenin bir üyesidir. (Press, 1972b)

2.1.2 Tanım

Aynı dağılımlı X_1 ve X_2 rasgele değişkenlerinin dağılımı ancak ve ancak herhangi pozitif a ve b sabitleri için

$$a X_1 + b X_2 \overset{d}{=} c X_1 + d \tag{4}$$

(4) eşitliğini sağlayan bir pozitif c ve bir $d \in R$ varsa, kararlı dağılım ailesine aittir denir.

($\overset{d}{=}$ sembolü, dağılımda denklik anlamına gelir yani her iki ifade aynı olasılık kuralına sahiptir.)

2.1.3 Tanım

Aynı dağılımlı $X_1, X_2, ..., X_n$ rasgele değişkenlerinin dağılımı ancak ve ancak herhangi $n \geq 2$ için

$$X_1 + ... + X_n \overset{d}{=} c_n X_1 + d_n \tag{5}$$

(5) eşitliğini sağlayan bir pozitif c_n ve bir $d_n \in R$ varsa, kararlı dağılım ailesine aittir denir (Zolotarev, V.M. 1986). Zolotarev (1986) bu tanımlamalarında değişkenlerin bağımsızlığı hakkında bir açıklama yapmamıştır.

2.1.4 Tanım

Eğer bağımsız, aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin toplamı bir limit dağılımına sahipse, bu limit dağılımı kararlı sınıfın bir üyesidir (Fama ve Roll, 1968).

2.2 Temel Özellikler

α - kararlı, kararlı Pareto ya da Levy kararlı olarak ta isimlendirilen kararlı dağılımlar, Levy tarafından bağımsız rasgele değişkenlerin toplamlarının davranışları hakkında yaptığı araştırmalar sırasında tanıtılmıştır. α - kararlı dağılıma sahip, α indeksli iki bağımsız rasgele değişkenin toplamı, yine aynı α indeksli, α - kararlı dağılıma sahiptir. Ancak bu değişmezlik özelliği, farklı α lar için sağlanmaz.

α -kararlı dağılımları tanımlayabilmek için dört parametre gereklidir: Bu parametreler: kararlılık indeksi, karakteristik üs veya kuyruk indeksi, $\alpha \in (0,2]$ çarpıklık parametresi veya indeksi, $\beta \in [-1,1]$, ölçü parametresi, $\gamma > 0$ konum parametresi $\delta \in R$ dir. σ ve μ sembolleri (bu semboller yalnızca standart sapma ve ortalama için kullanılacaktır) ile karışmaması bakımından, ölçü parametresi için, γ konum parametresi için ise δ kullanılmıştır. Karakteristik üs α, dağılımın kuyruklarının incelme oranını belirler. $\alpha = 2$ olduğunda, dağılım normal dağılımdır. $\alpha < 2$ iken, varyans sonsuzdur. $\alpha > 1$ iken, dağılımın ortalaması mevcuttur ve δ 'ya eşittir. Çarpıklık parametresi β pozitifken dağılım sağa çarpıktır yani sağ kuyruk daha kalındır. β negatif iken ise dağılım sola çarpıktır. $\beta = 0$ olduğunda dağılım δ etrafında simetriktir. Son iki parametre, γ ve δ, alışılagelmiş ölçü ve konum parametreleridir ve γ genişliği belirlerken, δ dağılımın modunun (tepesinin) kaymasını belirler. $\gamma = 1$ ve $\delta = 0$ olduğunda, dağılıma standart kararlı dağılım denir. Genellikle $\gamma > 0$ olmaktadır. α ve, β dağılımın formunu belirlediğinden, bu parametreler biçim parametreleri olarak düşünülebilir (Rozelle and Fielitz, 1980).

Kararlı dağılımlar için çeşitli parametre tahmin yöntemleri önerilmiştir. Kuyruk İndeksi Tahmini Yöntemi, Fama-Roll Tahmin Yöntemi, En Çok Olabilirlik Yöntemi, Yüzdelik Tahmini Yöntemleri, Karakteristik Fonksiyon Yaklaşımı kullanan yöntemler bu yöntemlere örnek olarak verilebilir.

2.3. Kararlı Dağılımlara Örnekler: Normal Dağılım, Cauchy ve Levy Dağılımları

Kararlı dağılımların sürekli oldukları ve yoğunluğa sahip oldukları iyi bilinir. Ancak bu yoğunluklar genellikle yalnızca sonsuz seriler şeklinde ifade edilirler. Yoğunlukların kapalı formlarının bulunmaması (Normal, Cauchy ve Levy dağılımları hariç) sebebiyle, kararlı dağılımlar genellikle karakteristik fonksiyonlar ile ifade edilirler.

Yoğunluk fonksiyonlarının kapalı formda ifade edilebildiği üç durum incelenecek olursa;

Örnek 1. Normal veya Gaussian dağılımları. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ için yoğunluk fonksiyonu eşitlik (6)' da verilmiştir.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty \qquad (6)$$

Örnek 2. Cauchy dağılımı $X \sim \text{Cauchy}\ (\gamma,\delta)$ için yoğunluk fonksiyonu eşitlik (7)'de verilmiştir.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\,\frac{\gamma}{\gamma^2+(x-\delta)^2}, \ -\infty < x < \infty \qquad (7)$$

Örnek 3. Levy dağılımı $X \sim \text{Levy}\ (\gamma,\delta)$ için yoğunluk fonksiyonu eşitlik (8)'de verilmiştir.

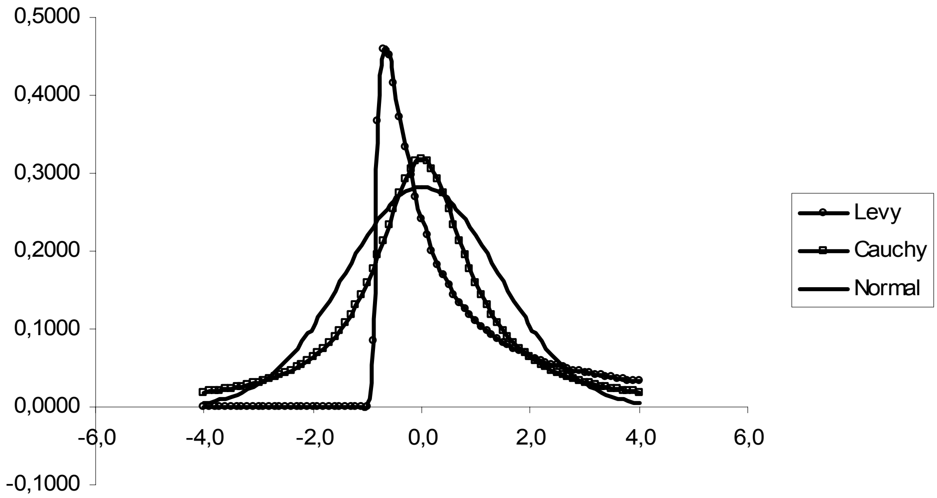
$$f(x)=\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}\,\frac{1}{(x-\delta)^{3/2}}\,\exp\left(-\frac{\gamma}{2\,(x-\delta)}\right), \ \delta < x < \infty \qquad (8)$$

Şekil 1. de bu üç yoğunluğa ilişkin grafik yer almaktadır.

bölgesinde toplandığı, yüksek derecede çarpık bir dağılımdır ve Cauchy dağılımından bile kalın kuyrukludur. Tablo 1'de bu dağılımların kuyruk olasılıkları yer almaktadır.

Tablo 1. Standart Normal, Cauchy ve Levy dağılımlarının kuyruk olasılıkları

c	P(X >c)		
	Normal	Cauchy	Levy
0	0.5000	0.5000	1.0000
1	0.1587	0.2500	0.6827
2	0.0228	0.1476	0.5205
3	0.001347	0.1024	0.4363
4	0.00003167	0.0780	0.3829
5	0.0000002866	0.06287	0.3453



Şekil 1. Standart Normal N(0,1), Cauchy (1,0), Levy (1,0) yoğunluklarının grafikleri

Normal ve Cauchy dağılımları simetrik ve çan eğrisi şeklindedirler. İki dağılım arasında temel nitel farklılık, Cauchy dağılımının daha kalın kuyruklu olmasıdır. Özellikle normal dağılımda 3 'ten büyük c değerleri için P(X >c) olasılığı oldukça küçük iken; Cauchy dağılımında bu olasılık önemli bir değerdir. İki dağılımdan çekilen örneklerde, Cauchy dağılımında normal dağılımdan ortalama 100 kez daha fazla 3'ün üzerinde değer bulunur. Kararlı dağılımların kalın kuyruklu olarak anılması bu nedenledir. Normal ve Cauchy dağılımlarının tersine Levy dağılımı, bütün olasılığın x > 0

Normal dağılım $(\alpha = 2,\ \beta = 0, \gamma = \sigma/\sqrt{2}\,, \delta = \mu)$ Cauchy dağılımı $(\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma, \delta)$ ve Levy dağılımı $(\alpha = 1/2\,,\ \beta = 1,\ \gamma, \delta)$ parametreleriyle kararlıdırlar (Nolan, 2005).

3. PARAMETRELEMELER VE KARARLI RASGELE DEĞİŞKENLERİN TOPLAMLARINA İLİŞKİN ÖZELLİKLERİ

Kararlı kuram için çok sayıda parametreleme mevcuttur ve bu farklı parametrelemeler karışıklığa yol açmaktadır. Parametrelemedeki çeşitlilik, tarihsel gelişimden ve çok sayıda problemin kararlı dağılımların özelleştirilmiş biçimlerinin kullanılarak analiz edilmesinden kaynaklanmaktadır. Farklı durumlarda, farklı parametrelemelerin kullanılmasının haklı sebepleri vardır. Sayısal çalışma veya veri modellemek için ayrı, dağılımın basit cebirsel özellikleri gerektiğinde ayrı ve kararlı kuramın analitik özellikleri çalışılmak istendiğinde ayrı bir parametreleme tercih edilebilir (Nolan,1998).

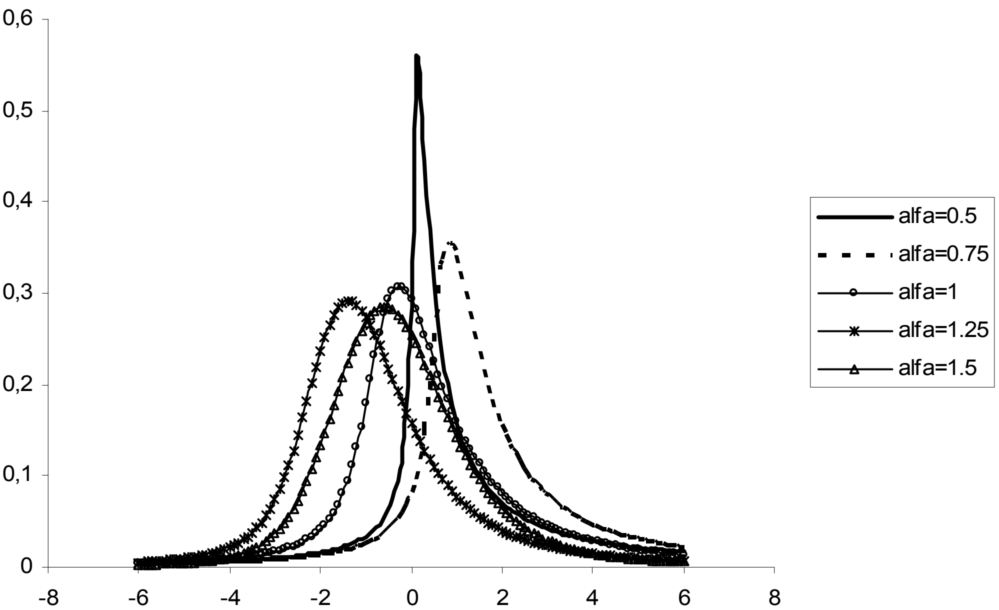
3.1 $S_\alpha(\beta,\gamma,\delta)$ Parametrelemesi

$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ parametreli, α-kararlı bir rasgele değişken $X \sim S_\alpha(\beta,\gamma,\delta)$ in karakteristik fonksiyonu için Samorodnitsky ve Taqqu (1994) ve Weron (2004) tarafından verilen en popüler parametreleme eşitlik (9)'daki gibidir:

$$\ln\phi(t) = \begin{cases} \left(-\gamma^\alpha |t|^\alpha \left[1 - i\beta\left(\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)(\operatorname{sign}(t))\right] + i\delta t\right) & \alpha \neq 1 \\ \left(-\gamma|t| \left[1 + i\beta\frac{2}{\pi}(\operatorname{sign}(t)) \ln|t|\right] + i\delta t\right) & \alpha = 1 \end{cases} \tag{9}$$

Ölçü parametresi $\gamma = 1$ ve konum parametresi $\delta = 0$ olduğunda, dağılım standardize edilmiş olur ve $S_\alpha(\beta,1,0)$ notasyonunun kısaltılmış hali $S_\alpha(\beta)$ sembolü ile ifade edilir.

Diğer taraftan, karakteristik fonksiyonun basit formu ve cazip cebirsel özellikleri ile ilgilenildiğinde $S_\alpha(\beta,\gamma,\delta)$ parametrelemesi tercih edilir. $S_\alpha(\beta,\gamma,\delta)$ parametrelemesi, bu özellikleri en yaygın kullanılan parametrelemedir ve kararlı dağılımlarla ilgili kanıtlamalarda kullanılmaktadır. $S_\alpha(\beta,\gamma,\delta)$ parametrelemesinin temel dezavantajı, $\alpha=1$ in herhangi bir komşuluğunda modun konumunun sınırsız olmasıdır. Şekil 2.de α- parametrelemesinde yoğunlukların biçimi görülebilir.



Şekil.2. $S_\alpha(0.5,1,0)$ parametrelemesinde, $\alpha = 0.5, 0.75, 1, 1.25$ ve 1.5 için kararlı yoğunluklar

3.2. $S_\alpha^0(\gamma,\beta,\delta_0)$ Parametrelemesi

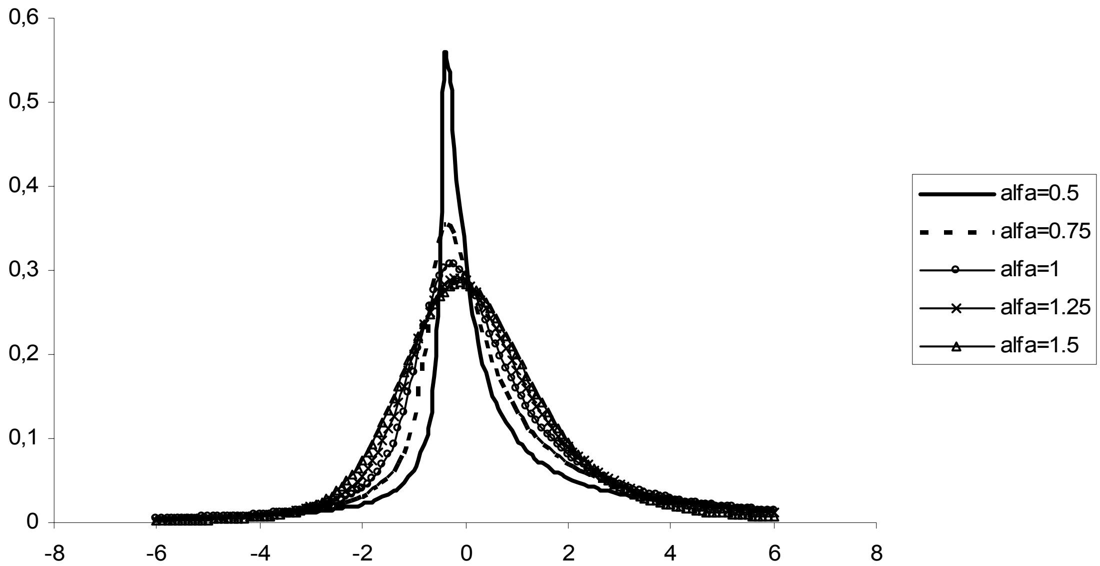
$S_\alpha^0(\gamma,\beta,\delta_0)$ parametrelemesi, Zolotarev'in M parametrelemesinin karakteristik fonksiyonu, yoğunluk ve dağılım fonksiyonunun bütün dört parametrede ortak sürekli olduğu değişik bir biçimidir. Sayısal amaçlar için Nolan (1997) tarafından önerilmiştir.

$$\ln\phi_0(t)=\begin{cases}\left(-\gamma^{\alpha}|t|^{\alpha}\left[1+i\beta\left(\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)(\text{sign}(t))\left(\gamma|t|^{1-\alpha}-1\right)\right]+i\delta_0 t\right) & \alpha\neq 1\\ \left(-\gamma|t|\left[1+i\beta\frac{2}{\pi}(\text{sign}(t))\log(\gamma|t|)\right]+i\delta_0 t\right) & \alpha=1\end{cases} \quad (10)$$

Ölçü parametresi $\gamma=1$ ve konum parametresi $\delta=0$ olduğunda, dağılım standardize edilmiş olur ve $S^0_\alpha(\beta,1,0)$ notasyonunun kısaltılmış hali $S^0_\alpha(\beta)$ sembolü ile ifade edilir.

$\alpha=2$ olduğunda, $S^0_2(0,\gamma,\delta_0)$ dağılımı, δ ortalamalı ve $2\gamma^2$ varyanslı normal dağılıma sahiptir ($S^0_2(0,\gamma,\delta_0)=N(\delta,2\gamma^2)$).

$S^0_\alpha(\beta,\gamma,\delta_0)$ parametrelemesi, kararlı dağılımlarla ilgili sayısal çalışmalarda ve istatistiksel çıkarımlarda önerilir. $S^0_\alpha(\beta,\gamma,\delta_0)$ parametrelemesinde kararlı yoğunlukların şekilleri, Şekil 3. de verilmiştir Eğer $X\sim S^0_\alpha(\beta,\gamma,\delta)$ ise, o halde $(X-\delta)/\gamma\sim S^0_\alpha(\beta,1,0)$ dağılır. Bu durum $\alpha=1$ olduğunda $S_\alpha(\beta,\gamma,\delta)$ parametrelemesi için doğru değildir.



Şekil.3. $S^0_\alpha(0.5,1,0)$parametrelemesinde, $\alpha=0.5, 0.75, 1, 1.25$ ve 1.5 için kararlı yoğunluklar

İki parametrelemenin konum parametreleri arasında aşağıdaki ilişki vardır:

$$\delta=\begin{cases}\delta_0-\beta\gamma\tan\frac{\pi\alpha}{2} & \alpha\neq 1\\ \delta_0-\beta\frac{2}{\pi}\gamma\ln\gamma & \alpha=1\end{cases} \quad (11)$$

$\beta=0$ olduğunda, iki parametreleme denktir ve ölçü parametresi kullanıldığında, $S^0_\alpha(0,\gamma,0)=S_\alpha(0,\gamma,0)$ şeklinde gösterilir (Borak vd., 2005).

3.3 Parametrelemelerin Kararlı Rasgele Değişkenlerin Toplamlarına İlişkin Özellikleri

3.3.1 $S^0_\alpha(\beta,\gamma,\delta_0)$ Parametrelemesinde Kararlı Rasgele Değişkenlerin Toplamlarına İlişkin Özellikler

1. Eğer $X\sim S^0_\alpha(\beta,\gamma,\delta_0)$ ise herhangi $a\neq 0$ ve $b\in R$ için

$$aX+b\sim S^0_\alpha(\text{sign}(a)\beta,|a|\gamma,a\delta_0+b) \quad \text{olur.}$$

2. Bütün dört parametre $\alpha,\beta,\gamma,\delta_0$ için, karakteristik fonksiyonlar, yoğunluk ve dağılım fonksiyonları ortak olarak süreklidir.

3. $X_1\sim S^0_\alpha(\beta_1,\gamma_1,\delta_1)$ ve $X_2\sim S^0_\alpha(\beta_2,\gamma_2,\delta_2)$ bağımsız rasgele değişkenler iseler

$X_1 + X_2 \sim S^0_\alpha(\beta,\gamma,\delta_0)$ olur, bu dağılımın parametreleri:

$$\beta = \frac{\beta_1\gamma_1^\alpha + \beta_2\gamma_2^\alpha}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha}, \qquad \gamma^\alpha = \gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha$$

$$\delta_0 = \begin{cases} \delta_1 + \delta_2 + \left(\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)[\beta\gamma - \beta_1\gamma_1 - \beta_2\gamma_2] & \alpha \neq 1 \\ \delta_1 + \delta_2 + \frac{2}{\pi}[\beta\gamma\ln\gamma] - \beta_1\gamma_1\ln\gamma_1 - \beta_2\gamma_2\ln\gamma_2 & \alpha = 1 \end{cases} \tag{12}$$

şeklindedir.

4. $X_j \sim S^0_\alpha(\beta_j,\gamma_j,\delta_j)$ $j = 1,2,...,n$ kararlı bağımsız n tane rasgele değişken ve $w_1,...,w_n$ keyfi seçilmiş sayılar için

$$w_1X_1 + w_2X_2 + ... + w_nX_n \sim S^0_\alpha(\beta,\gamma,\delta)$$

$$\beta = \frac{\sum_{j=1}^{n}\beta_j(\text{sign}\, w_j)|w_j\gamma_j|^\alpha}{\gamma^\alpha}, \qquad \gamma^\alpha = \sum_{j=1}^{n}|w_j\gamma_j|^\alpha$$

$$\delta = \begin{cases} \sum_j w_j\delta_j + \tan\frac{\pi\alpha}{2}\left[\beta\gamma - \sum_j \beta j w_j\gamma_j\right] & \alpha \neq 1 \\ \sum_j w_j\delta_j + \frac{2}{\pi}\left(\beta\gamma\ln\gamma - \sum_j \beta j w_j\gamma_j\ln|w_j\gamma_j|\right) & \alpha = 1 \end{cases} \tag{13}$$

3.3.2 $S_\alpha(\beta,\gamma,\delta)$ Parametrelemesinde Kararlı Rasgele Değişkenlerin Toplamlarına İlişkin Özellikler

1. Eğer $X \sim S_\alpha(\beta,\gamma,\delta)$ ise herhangi $a \neq 0$ ve $b \in R$ için

$$aX + b \begin{cases} S_\alpha(\text{sign}(a)\beta, |a|\gamma, a\delta + b) & \alpha \neq 1 \\ S_1\left(\text{sign}(a)\beta, |a|\gamma, a\delta + b - \frac{2}{\pi}\beta\gamma a\ln|a|\right) & \alpha = 1 \end{cases}$$

olur.

2. Karakteristik fonksiyonlar, yoğunluk ve dağılım fonksiyonları $\alpha = 1$ iken sürekli ancak $\alpha = 1$ in herhangi bir komşuluğunda sürekli değildir.

3. $X_1 \sim S_\alpha(\beta_1,\gamma_1,\delta_1)$ ve $X_2 \sim S_\alpha(\beta_2,\gamma_2,\delta_2)$ bağımsız rasgele değişkenler iseler;

$X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\beta,\gamma,\delta)$ olur, bu dağılımın parametreleri:

$$\beta = \frac{\beta_1\gamma_1^\alpha + \beta_2\gamma_2^\alpha}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha}, \qquad \gamma^\alpha = \gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha \tag{14}$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

şeklindedir.

4. $X_j \sim S_\alpha(\beta_j,\gamma_j,\delta_j)$ $j = 1,2,...,n$ kararlı bağımsız n tane rasgele değişken ve $w_1,...,w_n$ keyfi seçilmiş sayılar için

$$w_1X_1 + w_2X_2 + ... + w_nX_n \sim S_\alpha(\beta,\gamma,\delta)$$

$$\beta = \frac{\sum_{j=1}^{n}\beta_j(\text{sign}\, w_j)|w_j\gamma_j|^\alpha}{\gamma^\alpha}, \qquad \gamma^\alpha = \sum_{j=1}^{n}|w_j\gamma_j|^\alpha$$

$$\delta = \begin{cases} \sum_j w_j\delta_j & \alpha \neq 1 \\ \sum_j w_j\delta_j - \frac{2}{\pi}\sum_j \beta j w_j\gamma_j\ln|w_j\gamma_j| & \alpha = 1 \end{cases} \tag{15}$$

(Nolan, 1998).

1. özellikler incelendiğinde, $S^0_\alpha(\beta,\gamma,\delta)$ parametrelemesinde γ ve δ standart ölçü ve konum parametreleri oldukları ancak $\alpha = 1$ iken $S_\alpha(\beta,\gamma,\delta)$ parametrelemesinde olmadıkları görülecektir. Tersine 2. özellikler incelendiğinde, yalnızca $S_\alpha(\beta,\gamma,\delta)$ parametrelemesinde konum parametresi, δ konum parametrelerinin toplamı $\delta_1 + \delta_2$ olmuştur. Her iki özelliği barındıran bir parametreleme mevcut değildir.

4. MCCULLOCH'UN YÜZDELİK TEKNİĞİ İLE PARAMETRE TAHMİNİ

4.1 α ve β Parametrelerinin Tahmini

Bağımsız ve aynı $S_\alpha(\beta,\gamma,\delta)$ kararlı dağılımından çekilmiş $x_1, x_2, ..., x_n$ gözlemlerinden oluşan örnek verilsin. x_p p.yığın yüzdeliği ve $\hat{x}_p$ ise örnek yüzdeliğini temsil etsin. $\hat{x}_p$ x_p'nin tutarlı bir tahmin edicisidir.

McCulloch, γ ve δ'dan bağımsız olup, yalnızca α ve β'nın fonksiyonu olan ν_α ve ν_β'yı eşitlik (16) ve (17)'deki gibi tanımlar.

$$\nu_\alpha = \frac{x_{.95} - x_{.05}}{x_{.75} - x_{.25}} \quad (16)$$

$$\nu_\beta = \frac{x_{.95} + x_{.05} - 2x_{.5}}{x_{.95} - x_{.05}} \quad (17)$$

ν_α 'nın ilgili örnek değeri $\hat{\nu}_\alpha$ ise (18)'deki gibidir ve bu istatistik ν_α 'nın tutarlı tahmin edicisidir.

$$\hat{\nu}_\alpha = \frac{\hat{x}_{.95} - \hat{x}_{.05}}{\hat{x}_{.75} - \hat{x}_{.25}} \quad (18)$$

$\hat{\nu}_\beta$ değeri, $\hat{\nu}_\alpha$ değerine benzer olarak hesaplanır. ν_α gibi ν_β da γ ve δ 'dan bağımsızdır ve $\hat{\nu}_\beta$, ν_β 'nin tutarlı tahmin edicisidir.

$$\begin{aligned} \nu_\alpha &= \phi_1(\alpha,\beta) \\ \nu_\beta &= \phi_2(\alpha,\beta) \end{aligned} \quad (19)$$

İlişki, eşitlik (20)'deki gibi tersine çevrilerek, α ve β parametreleri ν_α ve ν_β 'nın fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \alpha &= \psi_1(\nu_\alpha, \nu_\beta) \\ \beta &= \psi_2(\nu_\alpha, \nu_\beta) \end{aligned} \quad (20)$$

ν_α ve ν_β 'nın yerlerine, örnek değerleri konularak, α ve β parametrelerinin tutarlı tahmin edicileri (21)'deki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \psi_1(\hat{\nu}_\alpha, \hat{\nu}_\beta) \\ \hat{\beta} &= \psi_2(\hat{\nu}_\alpha, \hat{\nu}_\beta) \end{aligned} \quad (21)$$

Bu tahmin edicilerin değerlerini veren tablolar McCulloch'un (1986) çalışmasında yer almaktadır.

4.2 Ölçü Parametresinin Tahmini

$$\begin{aligned} \nu_\gamma &= \frac{x_{.75} - x_{.25}}{\gamma} \\ \nu_\gamma &= \phi_3(\alpha,\beta) \end{aligned} \quad (22)$$

(22)'de verilen eşitliklerden yararlanarak ölçü parametresi γ aşağıdaki gibi tahmin edilir:

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{x}_{.75} - \hat{x}_{.25}}{\phi_3(\hat{\alpha},\hat{\beta})} \quad (23)$$

$\hat{\gamma}$ değerleri, ν_γ α ve β değerlerine göre, McCulloch'un (1986) çalışmasında verilen tablolar yardımıyla bulunmaktadır.

4.3 Konum Parametresinin Tahmini

$$\begin{aligned} \nu_\delta &= \frac{\delta - x_{.5}}{\gamma} \\ \nu_\delta &= \phi_4(\alpha,\beta) \end{aligned} \quad (24)$$

(24)'de verilen eşitliklerden yararlanarak ölçü parametresi δ aşağıdaki gibi tahmin edilir:

$$\hat{\delta} = \hat{\gamma}.\phi_4(\hat{\alpha},\hat{\beta}) + \hat{x}_{.5} \quad (25)$$

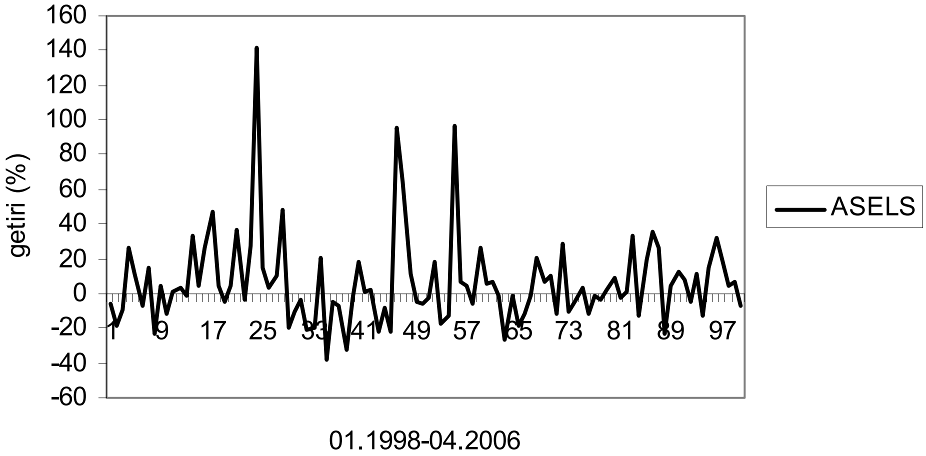
$\hat{\delta}$ değerleri, ν_δ, α ve β değerlerine göre, McCulloch'un (1986) çalışmasında verilen tablolar yardımıyla bulunmaktadır(McCulloch, 1986).

5. MENKUL KIYMET FİYATLARI DAVRANIŞI UYGULAMASI

Mandelbrot (1963, 1967) ve Fama'nın (1965) temel çalışmaları, finansal varlıkların deneysel dağılımlarına olan ilgiyi başlatmıştır.1960'lı yılların başında Mandelbrot varlık getirilerinin dağılımlarını modellemede normal dağılımın yetersizliğine ve getiri dağılımlarının kalın kuyruk özelliğine işaret etmiştir. Bundan sonra, fiyat değişimlerinin dağılımının Gaussian olmayan özelliği çeşitli market verilerinde sık sık gözlenmiştir (Cont,2001).

Menkul kıymet fiyat değişimlerinin dağılımı, ekonomist ve finans analistleri için ilgi konusu olmuş ve bu konuda pek çok çalışma yapılmıştır. Modern finansta birçok teknik rasgele değişkenlerin normal dağılıma uyduğu varsayımına dayanmaktadır. Kararlı dağılımlar cazip özellikleri nedeniyle, normal dağılıma bir alternatif olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bu bölümde İstanbul Menkul Kıymetler Borsasın'da işlem gören Aselsan (ASELS) hisse senedinin 01.1998–04.2006 dönemleri arasındaki aylık getirilerinin (toplam 100 ay) dağılımlarının yapısı incelenecektir. Aselsan hisse senedi getirilerinin sözü edilen dönemdeki grafiği Şekil 4' te verilmiştir.



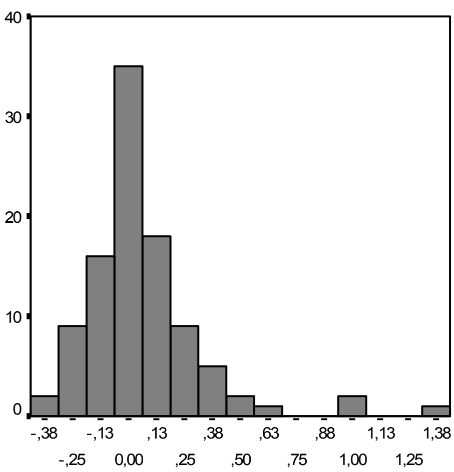
Şekil.4. Aselsan hisse senedinin 01.1998 - 04.2006 periyodundaki aylık getirilerinin zamana göre grafiği

Bu hisse senedinin getirilerine ilişkin betimsel istatistikler Tablo 2. de verilmiştir.

Tablo 2. Aselsan Hisse senedinin getirilerine ilişkin betimsel istatistikler

Hisse Senedi	Ortalama (%)	St.Sapma	Minimum (%)	Maximum (%)	Çarpıklık	Basıklık
ASELSAN	6.39	25.95	-38	141	2.32	8.60

İlk adımda, hisse senedine ait getirilerin dağılımının normal dağılıma uyup uymadığı Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testi kullanılarak test edilmiş ve teste ilişkin p değeri aşağıdaki 0.018 bulunmuştur. Bu durumda Aselsan hisse senedinin getirilerin dağılımının teorik dağılımının normal dağılım olduğunu iddia eden yokluk hipotezi 0.05 anlamlılık düzeyinde reddedilmiştir.



Şekil 5. Aselsan Hisse Senedinin Getirilerine ait Histogram

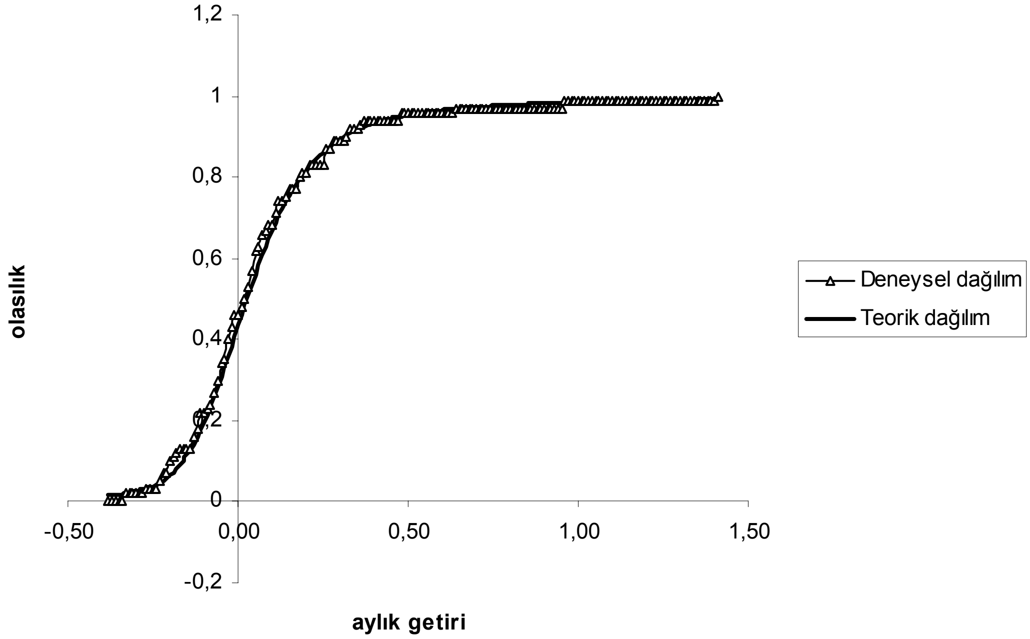
Hisse senedi getirilerinin dağılım parametreleri, yüzdelik tahmini yöntemlerinden 4. bölümde anlatılan McCulloch'un Yüzdelik Tekniği ile sıfır parametrelemesi için tahmin edilmiş ve Tablo 3' teki sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 3. Hisse senedinin getirilerinin dağılımının McCulloch'un Yüzdelik Tekniği ile elde edilen parametre tahminleri

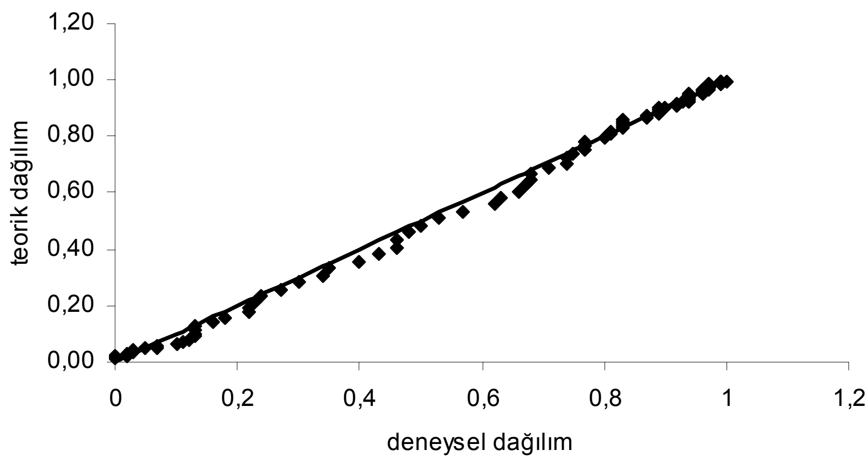
HİSSE SENEDİ		**McC. Yüzdelik UyumTekniği**			
		$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}$
ASELS	S_{α}^{0}	1.461	0.598	0.109	0.007

Aselsan hisse senedinin getirileri için, McCulloch'un Yüzdelik Tekniği ile tahmin edilen S_{α}^{0} parametrelerine sahip $S_{1.461}^{0}(0.598, 0.109, 0.007)$ dağılımı için teorik dağılım fonksiyonu ve deneysel dağılım fonksiyonu Şekil 6'da görüldüğü gibi olmuştur. (yalnız 0-parametrelemesine ilişkin sonuçlar verilmiştir, α-parametrelemesi için de benzer sonuçlar elde edilmiştir)

Getirilerin deneysel dağılımının, $S_{1.461}^{0}(0.598, 0.109, 0.007)$ teorik dağılımına uyumunu gösteren P-P Plot Şekil 7'deki gibi olur.



Şekil 6. Aselsan hisse senedi için deneysel dağılım ve McCulloch'un Yüzdelik Tekniği ile S_{α}^{0} parametrelemesiyle fit edilen teorik dağılım



Şekil 7. Aselsan Hisse senedi getirilerine ilişkin $S_{1.461}^{0}\left(0.598, 0.109, 0.007\right)$ dağılımı için P-P Plot

Şekil-7 incelendiğinde, deneysel dağılımın, teorik dağılıma yakın olduğu ve iyi bir uyum gösterdiği görülmektedir. Yapılan Kolmogorov-Smirnov testi sonucunda deneysel dağılımın, $S_{1.461}^{0}\left(0.598, 0.109, 0.007\right)$ teorik dağılımına uyduğu hipotezi 0.05 anlamlılık düzeyinde reddedilememiş, test sonucu grafiksel teşhis yöntem sonuçlarını destekler nitelikte olmuştur (hesaplanan test istatistiği değeri : $D = 0.0435$, kritik değer: $D_k = 0.1014$). Parametre tahmin etme ve teorik dağılıma ilişkin veri üretme işlemleri STABLE paket programı kullanılarak yapılmıştır.

6. SONUÇ/TARTIŞMA

Kararlı dağılımlar birçok fiziki ve ekonomik sistem türleri için bir model olarak önerilmişlerdir. Bir sistemin tanımlanmasında kararlı dağılımların kullanımının birtakım nedenleri vardır. Birinci neden, normal olmayan kararlı bir model beklemek için sıkı teorik nedenlerin olmasıdır. Örneğin, dönen bir aynanın yansıması Cauchy dağılımına, Brown hareketi için çarpma sayısı Levy dağılımına, yıldızların yerçekimi ile ilgili alanı Holtsmark dağılımına uyar. İkinci neden, bağımsız aynı dağılımlı terimlerin normalleştirilmiş toplamlarının tek mümkün limitinin kararlı olduğunu belirten genelleştirilmiş merkezi limit teoremidir. Gözlenen bazı nicelikler birçok küçük terimin toplamıdır (örneğin bir menkul kıymetin günlük, haftalık ya da aylık fiyat değişimleri, işlemden işleme değişimlerin basit toplamlarıdır) ve böyle sistemleri tanımlamak için bir kararlı model kullanılmalıdır. Kararlı dağılımlarla modelleme için üçüncü neden ise deneysel: birçok büyük veri setleri kalın kuyruk ve çarpıklık yapısı gösterirler.

Bu çalışmada, kalın kuyruklu ve çarpık verileri modellemede önemli yere sahip kararlı dağılımlara ilgi çekmek amaçlanmış ve bu dağılımlar ayrıntılı bir biçimde tanıtılmıştır. Kararlı dağılımların özellikleri ve bu dağılımlara ilişkin parametrelemeler, özellikleriyle beraber verilmiştir.

Kararlı dağılımların güncel hayatta rastlanan bir dağılım türü olduğunu örneklendirmek için, İMKB'de işlem gören bir hisse senedine ait getiriler ele alınarak, bu getirilerin dağılım yapısı ve kararlı dağılıma uygunluğu incelenmiştir. Uygulanan grafiksel teşhis yöntemleri, getirilerin dağılımının kararlı dağılımlara uygun olduklarını göstermiş, uyum iyiliği testi de bu yöntemleri destekler nitelikte sonuçlanmıştır. Verinin istatistiksel davranışının iyi bilindiği bir dağılımdan geliyor olması, araştırmacılar için her zaman bir avantaj olup, veri analizinin her aşamasında yararlı bir bilgidir. Kararlı dağılımlar, aykırı gözlemler çıkarılmaksızın, veriyi kalın kuyruk özelliğiyle modellemeye imkan tanır ve değişkenlerin doğrusal bileşenlerinin kararlı dağılım varsayımı altında analiz edilmesi daha kolaydır.

KAYNAKLAR

Borak, S., Wolfgang, H. ve Weron, R. (2005). *Stable Distributions*. SFB 649 Discussion Paper.

Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantative Finance* 1(223-236).

Fama, E.F. (1965). The behaviour of stock – market prices. *Journal of Business* 38 (34-105).

Fama, E.F. ve Roll, R. (1971). Parameter estimates for symmetric stable distributions. *Journal of the American Statistical Association* 66(331-338).

Mandelbrot, B. (1963). The variation of speculative prices. *Journal of Business* 36(394-419).

Mandelbrot, B. (1967). The variation of some other speculative prices. *Journal of Business* 40(393-413).

McCulloch, J.H. (1986). Simple consistent estimators of stable distribution parameters. *Communications in Statistics: Simulation and Computation* 15(1109-1136).

Nolan, J.P. (2005). Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data.http:// academic2.american.edu/ ~jpnolan/stable/chap1.pdf

Nolan, J.P. (1997). Numerical calculation of stable densities and distribution functions. *Communications in Statistics- Stochastic Models* 13(759-774).

Nolan, J.P. (1998). Parametrizations and modes of stable distributions. *Statistics and Probability Letters* 38(187-195).

Press, S.J. (1972a). Estimation in univarite and multivariate stable distribution. *Journal of the American Statistical Association* 67(842-846).

Press, S.J. (1972b). *Applied Multivariate Analysis*. Holt, Rinehart and Winston Inc., New York.

Rozelle, J.P. ve Fielitz, B.D. (1980). Skewness in common stock returns. *The Financial Review* 15(1-23).

Samorodnitsky, G. and Taqqu, M.S. (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall.

Weron, R. (2004). *Computationally intensive value at risk calculations*. Handbook of Computational Statistics, Springer, ss. 911-950, Berlin.

Zolotarev, V.M. (1986). *One-dimensional Stable Distributions*. American Mathematical Society, USA.

Filiz KARDİYEN, 1977 yılında Ankara'da doğdu. 1998 yılında Gazi Üniversitesi Fen- İstatistik Bölümünde lisans öğrenimini tamamladı. Yüksek lisans derecesini Orta Doğu Teknik Üniversitesi İstatistik Bölümü'nden 2002 yılında aldı. Doktora çalışmasını Gazi Üniversitesi İstatistik Bölümü'nde 2008 yılında tamamladı. Gazi Üniversitesi İstatistik Bölümü'nde yardımcı doçent kadrosunda görev yapmaktadır. İlgi alanları, çok değişkenli istatistiksel analiz, portföy analizi, olasılıktır.