ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.:10-Sayı/No: 2 : 383-388 (2009)

ARAŞTIRMA MAKALESİ /**RESEARCH ARTICLE**

BAZI ÜÇGENSEL VE DÖRTGENSEL PROJEKTİF BİLARDO SINIFLARI ÜZERİNE

Ali DENİZ [1], Andrei V. RATİU [2]

ÖZ

Bu makalede Tabachnikov tarafından tanımlanan projektif bilardonun iki özel sınıfı ele alınmıştır. Bir üçgenin kenarları üzerinde kenara çapraz olarak tanımlanan özel bir vektör alanı için bütün yörüngelerin periyodik olduğu gösterilmiştir. Ayrıca dörtgen üzerinde tanımlanan benzer bir vektör alanı için parçacığın periyodik yörüngelerinin sadece köşegenlerin kesim noktasından geçen yörüngeler olduğu kanıtlanmıştır.

Anahtar Kelimeler : Bilardo problemleri, projektif geometri, periyodik yörünge.

ON CERTAIN CLASSES OF TRIANGULAR AND QUADRILATERAL PROJECTIVE BILLIARDS

ABSTRACT

In this paper we study two particular classes of projective billiards, a concept introduced by Tabachnikov. We prove that for a special choice of the transverse vector field along the edges of a triangular billiard table, all its trajectories are periodical, and that for a similarly defined vector field along the edges of a quadrilateral table the periodic trajectories are exactly the ones passing through the intersection point of the diagonals.

Keywords: Billiards problems, projective geometry, periodic trajectory.

1. GİRİŞ

n-boyutlu uzayda $(n \geq 2)$ parçalı düzgün bir M bölgesi içinde düz doğrular boyunca birim hızla hareket eden ve bir sınır noktasına geldiğinde yansıma kurallarına uyarak (geliş açısı yansıma açısına eşittir.) yansıyan bir parçacığın davranışını inceleyen problemler genel olarak *bilardo problemleri* olarak adlandırılır.

Parçacık düzgünlüğün bozulduğu bir $q \in \partial M$ sınır noktasına geldiğinde, bu noktada teğet ve normal tanımlı olmadığı için hareketin sona erdiği varsayılır. Düzgün sınır noktalarında teğet ve normal vektörleri tanımlıdır. Geliş açısı, parçacığın sınır noktasına geliş yönünü gösteren birim vektörün o noktadaki normal vektörü ile yaptığı açıdır. Yansıma açısı ise parçacığın sınır noktasından ayrıldığı yönü gösteren vektörle normal vektör arasındaki açıdır. Yansıma kuralına uyarak yansıyan parçacık için yansıma açısı geliş açısına eşittir. (Şekil 1.)

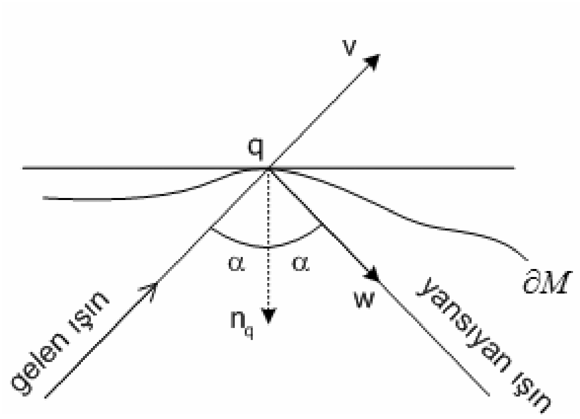
Yansıma, vektörler yardımıyla da ifade edilebilir. Gelen ışın vektörü *v,* bu noktadaki (birim) teğet ve normal vektörleri cinsinden yazıldıktan sonra, normal bileşeninin işareti değiştirilmek suretiyle yansıma vektörü bulunur. Bu işlem yapıldığında bu noktadaki normal vektör n_q olmak üzere yansıma vektörü

$$w = v - 2\langle v, n_q \rangle n_q$$

[1,] Anadolu Üniversitesi, Matematik Bölümü, 26470 ESKİŞEHİR. e-posta: adeniz@anadolu.edu.tr
[2,] İstanbul Bilgi Üniversitesi, Matematik Bölümü, İSTANBUL. e-posta: ratiu@bilgi.edu.tr

Geliş: 31 Ekim 2007; **Kabul:** 15 Eylül 2008

şeklinde bulunur. Burada $\langle \cdot,\cdot \rangle$ Öklidyen iç çarpımı göstermektedir. (Deniz, 2005, Tabachnikov, 2005). (bkz. Şekil 1.)



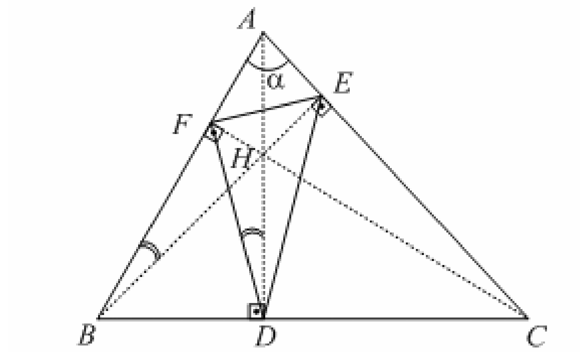
Şekil 1. Yansıma kuralı: geliş açısı yansıma açısına eşittir.

Hareketi esnasında takip ettiği yola parçacığın yörüngesi denir. Bir bilardo yörüngesi kapalı bir yörünge ise, yani, bir $q \in \partial M$ noktasından v vektörü yönünde harekete başlayan parçacık, belirli bir süre sonra yine $q \in \partial M$ noktasına v vektörü yönünde yansıyacak şekilde geliyorsa bu yörüngeye *periyodik yörünge* adı verilir.

Bu makalede düzlemde üçgenler ve dörtgenler içindeki bilardo problemleriyle ilgileneceğiz. Genel olarak çokgenler içinde periyodik yörüngelerin varlığı problemi hala çözülememiştir. Ancak bazı özel çokgenler için periyodik yörüngelerin var olduğu gösterilebilmiştir. Örneğin bütün dar açılı üçgenler içinde *Fagnano yörüngesi* olarak adlandırılan periyodik bir yörünge vardır (Tabachnikov, 2005). Dik açılı üçgenler başka türden periyodik yörüngelere sahiptirler. Bu yörüngeler Holt (1993) tarafından sınıflandırılmıştır. Ancak bu durum geniş açılı üçgenler için geçerli değildir. Bazı özel türden geniş açılı üçgenlerin de periyodik yörüngeye sahip oldukları gösterilmiştir. (Vorobets vd. 1992, Halbeisen ve Hungerbuhler, 2000). Çokgenler içindeki periyodik yörüngelerin varlığı ile ilgili olarak en genel çalışma Masur (1986) tarafından yapılmıştır. Buna göre açıları π 'nin rasyonel katları olan her çokgen içinde periyodik bilardo yörüngeleri vardır.

1.1 Dar Açılı Üçgenlerde Fagnano Yörüngesi

Dar açılı üçgenler içinde yükseklik ayaklarının birleştirilmesiyle elde edilen üçgen periyodik bir bilardo yörüngesidir. ΔABC dar açılı bir üçgen, α, β, γ 'da sırasıyla A, B, C köşelerindeki açılar olsun. ΔABC üçgeninin yüksekliklerinin kesim noktası H ve yüksekliklerin kenarlar üzerinde belirlediği noktalar sırasıyla D, E, F olsun. (bkz. Şekil 2). Bu durumda ΔDEF periyodik bir bilardo yörüngesidir ve ΔABC üçgeninin *Fagnano yörüngesi* veya ortik üçgeni olarak adlandırılır.



Şekil 2. Fagnano Yörüngesi.

ΔDEF üçgeninin periyodik bir bilardo yörüngesi olduğunu kanıtlamak için D, E, F köşelerindeki geliş ve yansıma açılarının eşit olduğunu göstermek gerekir. $AFHE, BDHF$ ve $CEHD$ dörtgenlerinde karşılıklı açıların toplamı π olduğundan dolayı dörtgenler birer çember üzerinde bulunurlar. $BDHF$ dörtgeninde $\angle HBF$ açısı ile $\angle HDF$ açısı aynı yayı gördükleri için ölçüleri eşittir. ΔAEB dik üçgen olduğu için bu açıların ölçüsü $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 'dır. ($\angle$ ile açı, $m(\cdot)$ ile açının ölçüsü gösterilmektedir). Böylece

$$m(HBF) = m(HDF) = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

elde edilir. Diğer taraftan $CEHD$ dörtgeninde $\angle EDH$ $\angle ECH$ açıları aynı yayı gördüklerinden ölçüleri eşittir ve ΔAFC dik üçgen olduğundan bu açıların ölçüleri de $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 'dır. Böylece D köşesindeki geliş ve yansıma açıları için

$$m(EDH) = m(HDF) = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

olur. Benzer biçimde F ve E köşelerindeki yansıma ve geliş açılarının eşitliği de kolaca gösterilebilir. Böylece ΔDEF üçgeninin periyodik bir bilardo yörüngesi olduğu kanıtlanmış olur.

Öklidyen yansıma durumunda her üçgende periyodik yörüngenin varlığının bilinmemesine rağmen, projektif bilardoda her yörüngesi periyodik olan üçgensel bilardo sınıfı tanımlayacağız.

1.2 Projektif Bilardo

Öklid uzayında bir M bölgesinin bir sınır noktasında yansıma işlemi, gelen ışın vektörü bu noktadaki teğet ve normal cinsinden yazıldıktan sonra, normal bileşeninin işareti değiştirilmek suretiyle yapılır. Tabachnikov, bu tanımı, normal vektör yerine kenar noktasında teğete çapraz bir vektör alarak genelleştirmiş, projektif yansıma kavramını tanımlamıştır. Projektif yansımada gelen ışın v teğet vektörü t ve teğete çapraz bir n vektörü cinsinden yazılır: $v = \lambda_1 t + \lambda_2 n$, ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$). Daha sonra yansıma vektörü normal bileşeninin işareti değiştirilerek elde edilir: $T(v) = \lambda_1 t - \lambda_2 n$. Bu şekilde elde edilen bilardo sınıfı projektif bilardo, burada yapılan yansıma da n vektörüne göre projektif yansıma olarak adlandırılır. (Tabachnikov, 1997). Projektif yansıma bu tanıma denk olarak v 'nin belirlediği doğrunun, t ve n 'nin belirlediği doğrulara göre harmonik eşleniği olarak da tanımlanabilir. Öncelikle düzlemde bir noktada kesişen dört doğrunun harmonik eşlenik olmasını tanımlayalım.

l_1, l_2, l_3, l_4 doğrularının çifte oranı, yardımcı bir l doğrusunun l_1, l_2, l_3, l_4 doğrularını kestiği noktalar sırasıyla X_1, X_2, X_3, X_4 olmak üzere

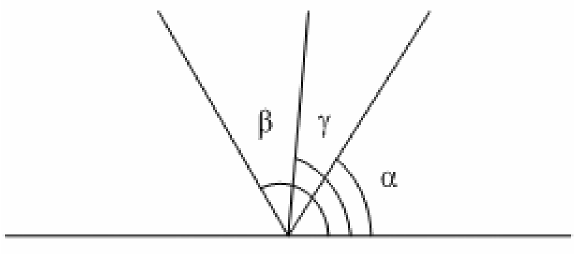
$$[l_1, l_2; l_3, l_4] = [X_1, X_2; X_3, X_4] = \frac{X_1 - X_3}{X_1 - X_4} : \frac{X_2 - X_3}{X_2 - X_4}$$

şeklinde tanımlanır ve seçilen yardımcı l doğrusundan bağımsızdır (Kaya, 1992, Tabachnikov, 1997). l_3 doğrusunun l_1, l_2 doğrularına göre harmonik eşleniği ise $[l_1, l_2; l_3, l_4] = -1$ olacak şekildeki l_4 doğrusudur. Buna göre v 'nin t ve n 'ye göre harmonik eşleniği $[t, n; v, T(v)] = -1$ olacak şekildeki $T(v)$ 'dir. (Tabachnikov, 1997).

Lemma 1. (Tabachnikov, 1997). Bir noktadan geçen harmonik eşlenik doğrular arasındaki açılar şekildeki gibi adlandırılmak üzere

$$\cot\alpha + \cot\beta = 2\cot\gamma$$

dır. (bkz. Şekil 3).



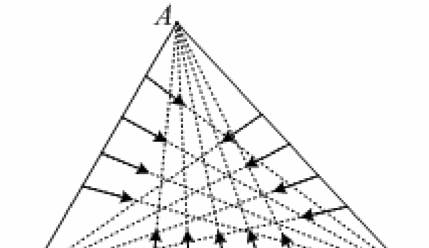
Şekil 3. Harmonik eşlenik doğrular için $\cot\alpha + \cot\beta = 2\cot\gamma$ 'dir.

2. PERİYODİK YÖRÜNGELİ BİLARDO SINIFININ TANIMLANMASI

Şimdi verilen bir ΔABC üçgeninin kenarları üzerinde kenara çapraz bir yön tanımlayarak projektif yansımaya göre bütün yörüngeleri periyodik olan bir üçgen elde edeceğiz.

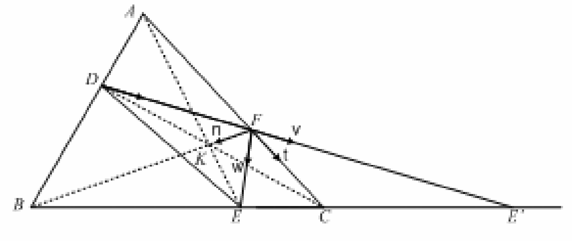
ΔABC herhangi bir üçgen ve bu üçgenin (köşeler dışındaki) bütün kenar noktalarına o noktadan karşı köşeye doğru birim vektör eklemek suretiyle verilen vektör alanı da N olsun. (Şekil 4). ΔABC üçgeni içinde doğrular boyunca ilerleyerek kenar noktasında N 'ye göre projektif yansıma yapan parçacığın hareketini ele alalım. Bu durumda aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem 1. ΔABC üçgeninde N vektör alanına göre projektif yansıma yapan parçacığın bütün yörüngeleri periyodiktir.



Şekil 4. N vektör alanı, üçgenin kenarları üzerindeki her noktaya karşı köşeye doğru bir vektör iliştirir.

İspat: Parçacık D noktasından harekete başlayarak AC kenarı üzerindeki bir F noktasına çarpıyor olsun. Parçacığın F noktasında projektif yansıma yaptıktan sonra gideceği noktayı belirlemek için BC yardımcı doğrusunu kullanacağız. Burada parçacığın F noktasına geliş vektörü v, bu noktadaki teğet vektörü AC 'nin belirlediği birim vektör t ve N vektör alanının F noktasında belirlediği vektör ise FB yönündeki birim vektör n 'dir. (bkz. Şekil 5).



Şekil 5. DFE yörüngesi periyodiktir.

DF 'nin belirlediği doğrunun BC 'nin belirlediği doğruyu kestiği nokta E' olsun. DC ve BF doğru parçalarının kesim noktasına da K diyelim. İddia ediyoruz ki, bu durumda parçacık F noktasında N vektörüne göre projektif yansıma yaptıktan sonra AK 'nın belirlediği doğrunun BC'yi kestiği E noktasına çarpacaktır. Gerçekten Ceva teoremine göre

$$\frac{EC}{EB}\frac{FA}{FC}\frac{DB}{DA}=-1$$

dir. Diğer taraftan Menaleus teoremine göre

$$\frac{E'C}{E'B}\frac{FA}{FC}\frac{DB}{DA}=1$$

dir. Bu eşitlikler taraf tarafa bölünürse

$$\frac{EC}{EB}:\frac{E'C}{E'B}=-1$$

elde edilir. Bu eşitlik FE' doğrusunun FC ve FB 'ye göre harmonik eşleniğinin FE olduğunu gösterir. Yani parçacık F noktasında N vektörüne göre projektif yansıma yaptıktan sonra E noktasına çarpacaktır.

Benzer şekilde parçacığın E noktasında yansıdıktan sonra D noktasına gideceği ve D noktasında yansıdıktan sonra yine F'ye geleceği gösterilebilir. Böylece parçacığın yörüngesinin periyodik olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 1'e göre D köşesinde DA, DC, ED, DF, E köşesinde EB, EA, FE, ED ve F köşesinde FC, FB, DF, FE doğru parçalarının belirlediği doğrular harmonik eşleniktir. Bunun sonucu olarak düzlemdeki bir $ABCD$ konveks dörtgeni içinde projektif yansıma yapan parçacığın hareketini inceleyeceğiz.

$ABCD$ düzlemde bir konveks dörtgen, N 'de, AB ve BC kenarlarındaki noktalara D'ye doğru, CD ve AD kenarlarındaki noktalara B'ye doğru birim vektör iliştiren bir vektör alanı olsun. Buna göre aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 2. $ABCD$ konveks dörtgeni içinde yukarıda tanımlanan N vektör alanı verilsin. Bu dörtgen içerisinde N 'ye göre projektif yansıma yapan parçacığın periyodik yörüngeleri sadece köşegenlerin kesim noktası E 'den geçen yörüngelerdir. Diğer yörüngelerin hareketi BD köşegenine yakınsar.

İspat: Teorem 1'den dolayı parçacık BD üzerindeki bir noktadan geçmek zorundadır. O halde hareketin BD üzerindeki bir noktadan başladığını kabul etmekte bir sakınca yoktur.

Parçacığın BD üzerindeki bir F noktasından BD ile $\alpha = m(DFG)$ radyanlık bir açı yapacak şekilde atıldığını varsayalım. Buna göre parçacık Teorem 1'den dolayı AD üzerinde G ve AB üzerinde H noktalarında yansıyarak F noktasına geri dönecektir. Burada $m(DFH) = \beta$ olsun. F noktasından geçerek CD üzerinde I ve BC üzerinde J noktalarında yansıyarak F noktasına tekrar gelen parçacığın yörüngesinin BD ile yaptığı açıyı α' olarak gösterelim. Bir tur boyunca α açısını α' açısına götüren bu dönüşüm

$$T:(0,\pi)\to(0,\pi)$$
$$T(\alpha)=\alpha'$$

olarak yazılabilir. (Şekil 6). (Parçacık BD ile π veya 0 radyanlık açı yapacak şekilde atılırsa sırasıyla B ve D köşelerine giderek duracaktır. Böylece dönüşümü açık aralıktan tanımlayabiliriz.)

$m(DFA) = \gamma$ ve $m(BFC) = \delta$ olsun. (Şekil 7). ΔABD üçgeninde Teorem 1'den dolayı F noktasında, HF, FG, FA ve BD'nin belirledikleri doğrular harmonik eşleniktir. Böylece Lemma 1 'den dolayı

$$\cot\alpha + \cot\beta = 2\cot\gamma \qquad (1)$$

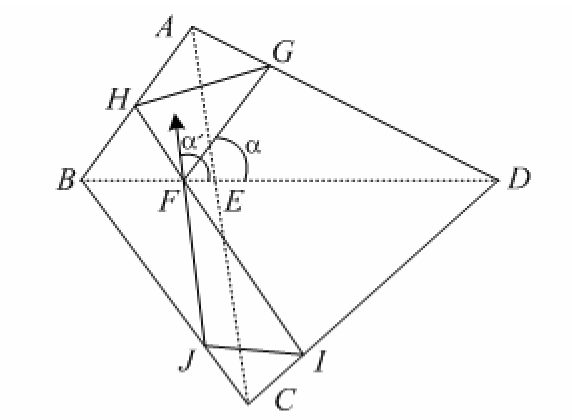
olur. Benzer şekilde ΔBCD üçgeni içinde F noktasında FI, FJ, FC ve BD'nin belirlediği doğrular harmonik eşleniktir ve yine Lemma 1 gereğince

$$\cot\beta + \cot\alpha' = 2\cot\delta \qquad (2)$$

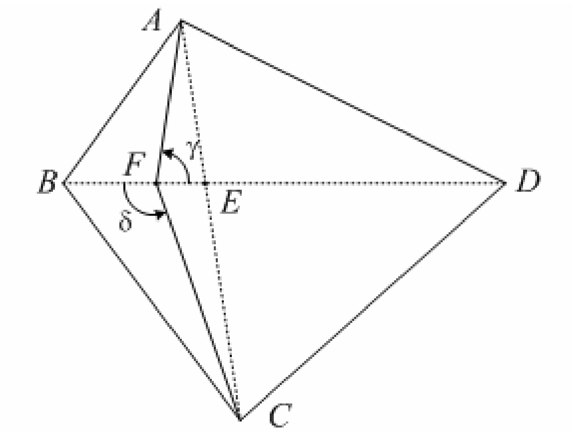
olur. (1) ve (2) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\cot\alpha - \cot\alpha' = 2(\cot\gamma - \cot\delta) \qquad (3)$$

elde edilir. γ ve δ değişmediğinden bu son eşitliğin sağ tarafı sabittir.



Şekil 6. T dönüşümü α açısını α' açısına götürür.



Şekil 7. γ ve δ açıları değişmediğinden $(\cot\gamma - \cot\delta)$ sabittir.

Şimdi parçacığın yörüngelerini BD köşegeni üzerinde hareketin başladığı F noktasının durumlarına göre inceleyelim. Parçacık BD köşegeni üzerinde köşegenlerin kesim noktasından atılıyorsa, yani $F = E$ ise $\gamma = \delta$'dır. Bu durumda (3) eşitliğinin sağ tarafı sıfır olur ve buradan $\cot\alpha = \cot\alpha'$ elde edilir. Kotanjant fonksiyonu $(0,\pi)$ aralığında birebir olduğundan $\alpha = \alpha'$ bulunur. Bu ise parçacığın yörüngesinin periyodik olması demektir.

Parçacığın E noktasından geçmeyen yörüngelerinin BD köşegenine yakınsadığını göstermek için F 'nin BE üzerinde olması ve F'nin ED üzerinde olması durumlarını ayrı ayrı inceleyeceğiz.

Öncelikle F noktasının BE üzerinde olması durumunu ($F \neq E$) ele alalım. Bu durumda $\gamma < \delta$'dır ve kotanjant fonksiyonu $(0,\pi)$ aralığında monoton azalan olduğundan $\cot\gamma > \cot\delta$'dır. Böylece (3) eşitliğinin sabit olan sağ tarafı sıfırdan kesin büyüktür. Bu durumda $\cot\alpha > \cot\alpha'$ elde edilir ve yine kotanjant fonksiyonunun azalanlığından dolayı $\alpha < \alpha' = T(\alpha)$ sonucuna ulaşılır. Böylece $\alpha \in (0,\pi)$ olmak üzere

$$T(\alpha), T^2(\alpha), T^3(\alpha), \ldots, T^n(\alpha), \ldots$$

şeklinde oluşturulan $T^n(\alpha)$ dizisi monoton artandır.

$\Delta = 2(\cot\gamma - \cot\delta) > 0$ olmak üzere (3) eşitliğinden $n = 1,2,3,...$ için

$$\cot\alpha - \cot T^n(\alpha) = n\Delta$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $n \to \infty$ iken limit alınırsa $\lim_{n\to\infty} \cot T^n(\alpha) = -\infty$ bulunur. $T^n(\alpha) \in (0,\pi)$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} T^n(\alpha) = \pi$ elde edilir. Bu ise parçacığın yörüngesinin BD köşegenine yakınsaması anlamına gelir.

F noktasının ED üzerinde bulunması durumunda ise $\gamma > \delta$'dır ve böylece $\Delta = 2(\cot\gamma - \cot\delta) < 0$ olur. Buradan $\alpha > \alpha' = T(\alpha)$ elde edilir. Bu durumda $T^n(\alpha)$, monoton azalan bir dizidir. Yukarıdakine benzer bir argümanla $\lim_{n\to\infty} \cot T^n(\alpha) = \infty$ ve buradan da

$\lim_{n\to\infty} T^n(\alpha) = 0$ elde edilir. Bu ise yine yörüngenin yine BD köşegenine yakınsaması demektir.

$ABCD$ dörtgeninin konveks olmaması durumunda da Teorem 2'nin bir benzeri geçerlidir. $ABCD$ konveks değilse köşegenlerinden sadece biri dörtgen içinde kalır. Bu köşegene iç köşegen diyelim. Dörtgenin her bir kenarı iç köşegenin birleştirdiği iki köşeden birini üzerinde bulundurur. İşte her bir kenardan, kendi üzerinde olmayan, iç köşegenin diğer köşesine doğru birim vektör iliştirmek suretiyle elde edilen vektör alanı N olsun. Bu durumda $ABCD$ dörtgeni içinde düz doğrular boyunca giderek sınır noktalarında N vektör alanına göre projektif yansıma yapan parçacığın bütün yörüngeleri iç köşegene yakınsayacaktır. $ABCD$ 'nin konveks olmaması durumunda köşegenlerin kesim noktası dörtgenin dışında kalacağından parçacığın periyodik yörüngesi yoktur.

3. SONUÇ

Düzlemde üçgen ve konveks dörtgen üzerinde alınan iki özel vektör alanına göre projektif bilardo yörüngeleri incelenmiş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Bir üçgenin bütün kenar noktalarına, o noktadan karşı köşeye doğru birim vektör eklemek suretiyle bir vektör alanı oluşturalım. Bu üçgen içinde düz doğrular boyunca hareket eden ve bir kenar noktasında oluşturulan vektör alanına göre projektif yansıma yapan parçacığın bütün yörüngeleri periyodiktir.

Düzlemde bir $ABCD$ konveks dörtgeninde, AB ve BC kenarlarındaki noktalara D 'ye doğru, CD ve AD kenarlarındaki noktalara B 'ye doğru birim vektör iliştiren bir vektör alanı oluşturalım. Bu dörtgen içinde düz doğrular boyunca hareket eden ve bir kenar noktasında oluşturulan vektör alanına göre projektif yansıma yapan parçacığın periyodik yörüngeleri sadece köşegenlerin kesim noktasından geçen yörüngelerdir. Diğer bütün yörüngeler BD köşegenine yakınsarlar.

KAYNAKLAR

Deniz, A. (2005). Çeşitli Bilardo Sınıflarındaki Yörüngelerin İncelenmesi. Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi.

Halbeisen, L. ve Hungerbuhler, N. (2000). On Periodic Billiard Trajectories in Obtuse Triangles. *SIAM Review* 42 (4), 657-670.

Holt, F. (1993). Periodic Reflecting Paths in Right Triangles. *Geometriae Dedicata* 46, 73-90.

Kaya, R. (1992). *Projektif Geometri*. Anadolu Üniversitesi Fen Ed. Fak. Yay. no:27.

Masur, H. (1986). Closed Trajectories for quadratic differential with application to billiards. *Duke Math. Journal*, 53 (2).

Tabachnikov, S. (1997). Introducing Projective Billiards. *Ergod. Th. & Dynam. Sys*. 17, 957-976.

Tabachnikov, S. (2005). Geometry and Billiards, AMS.

Vorobets, Ya. B., Gal'perin, G.A., Stepin, A.M. (1992). Periodic Billiard Trajectories in Polygons: Generating Mechanisms. *Uspekhi Math. Nauk*. 47(3), 9-74.

Ali DENİZ, 1976 yılında Ankara'da doğdu. Lisans öğrenimini Anadolu Üniversitesi Matematik Bölümü'nde 1998 yılında tamamladı. Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde 2001 yılında yüksek lisans öğrenimini, 2005 yılında doktorasını tamamladı. 2005 yılından bu yana Anadolu Üniversitesi Matematik Bölümü'nde öğretim üyesi olarak olarak görev yapmaktadır.

Andrei Valentin RATİU, 1964 yılında Bükreş'te doğdu. Lisans öğrenimini Bükreş Üniversitesi'nde tamamladı. 1996 yılında Paris 7 Üniversitesinde, Düğümler Teorisi üzerine doktorasını tamamladı. Halen öğretim üyesi olarak İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü'nde çalışmaktadır.