Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)
Cilt 3, Sayı 1, Haziran 2009, sayfa 156-173.

Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education
Vol. 3, Issue 1, June 2009, pp. 156-173.

Matematiksel Nesneler, Sorunlu Şeyler!

Y. Doç. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN*

*Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı, abdulkadirerdogan@anadolu.edu.tr

Makale Gönderme Tarihi: 02 Nisan 2008 Makale Kabul Tarihi: 02 Nisan 2009

Özet –Bu çalışmanın amacı bazı matematiksel nesnelerin ve yapıların anlaşılırlık ve kullanılabilirlik yönünden problemler içerdiğini ve bu durumun öğrencilerin çalışmalarına ve öğrenmelerine doğrudan etkisi olabileceğini göstermektir. Bu amaçla ortaöğretim öğrencileri tarafından onların ev ödevi ve alıştırmalar gibi çalışmalarına yardımcı olmak amacıyla tasarlanmış bir Internet forumuna gönderilen iki sorunun detaylı matematiksel ve epistemolojik analizlerine yer verilmektedir. Sonuç olarak matematik temelli bir bilim dalı olan matematik eğitiminde matematiksel içeriği analiz etmeye imkân verecek teori ve yaklaşımlara duyulan ihtiyaç ortaya konmaktadır.

Anahtar kelimeler: Cebir, fonksiyonlar, Internet forumu, lise birinci sınıf, içerik analizi, matematiksel ve epistemolojik analiz

Mathematical Objects: the Problematic Nature!

Abstract – This paper aims to show that some mathematical objects present difficulties of understanding and use, and that this situation may have a direct impact on the pupils' work and their learning. For this purpose, a thorough analysis of two questions put by pupils of secondary school on an Internet forum was carried out. That kind of forums was conceived to help them and to accomplish their school tasks (exercises, homework, revisions, etc.). Finally, the need felt in the domain of mathematics teaching for specific theories and approaches which enable to analyze the mathematical contents was underlined.

Key words: Algebra, functions, Internet forum, 10^{th} class, content analysis, mathematical and epistemological analysis

Giriş

Bir bilim dalı olarak matematiğin mükemmel bir yapı ortaya koyduğu ve onun nesnelerinin düzenli, sistemli ve anlaşılır olduğu matematik hakkında yaygın bir bakış açısıdır. Oysaki eğer matematik ve onun nesneleri bu kadar mükemmel ve anlamlı bir yapı sergiliyor olsalardı yeni gelişmeler yaşanmaz, yeni teoremler ortaya çıkmaz veya binlerce yıldır ispatı ile beraber bilinen temel teoremler için daha farklı ve daha güzel ispatlar geliştirilemezdi. Kısacası matematik bir bilim dalı olmaz, sadece belirli şekilde kullanılan bir bilgi birikimi olurdu.

Ayrıca, pek çok matematikçinin bazı tanımları ve ispatları yeterince açık, anlaşılır ve işlevsel bulmadıkları, bu nedenle daha tatminkâr tanım ve ispat arayışına girdikleri iyi bilinmektedir. Ülkemizde bu yaklaşımda olanların başında Cahit Arf gelmektedir. ODTÜ Matematik Bölümü'nde hocası olarak tanıdığı Arf için Prof. Dr. Ersan Akyıldız, Arf üzerine bir söyleşide şöyle demektedir:

> O günlerde "Homological Algebra" üzerine Cartan ve Eilenberg ile birlikte yazdıkları tek bir kitap vardı ve bunu referans olarak kullanıyorduk. Cahit Arf'in derste yaptıklarıyla kitapta yazılanlar arasında - kavramların, teoremlerin aynı olması dışında - ispat teknikleri açısından çok büyük farklılıklar gözlediğimi hatırlıyorum. Hocamız kitabı hikâye okur gibi okuyup, kendisine göre yorumlar, kendine özgü sitili ile Gotik harflerden oluşan güzel sembollerle dolu inci gibi yazılmış ders notları hazırlar ve onları bize anlatırdı. Bu arada, hiç çekinmeden, "Bu teorem böyle, ama ben bunu anlamadım" veya "Bu ispatı hiç sevmedim, daha iyi bir yolu olmalı" derdi. Nitekim bir gün yine böyle bir teoremi (her modül injective bir modülün alt modülüdür) ispatlamış, ama memnuniyetsizliğini belirterek, bunun daha anlaşılır bir ispatı olmalı demişti... (Akyıldız, 1998, s.4)

Bu matematikçi tutumuna daha somut bir örnek ise asal sayıların sayısının sonsuz olduğu teoremi ile ilgilidir. M.Ö. 3000-2000 yıllarında Öklid tarafından ortaya atılan ve olmayana ergi yöntemini kullanan ispat bu teoremle ilgili en iyi bilinen ispattır. Anlaşılırlığı, basitliği ve estetiği yönünden de pek çok matematikçi tarafından en güzel ispatlardan biri kabul edilir. Oysaki bu bile matematikçileri durdurmaya yetmez ve bu teoremin pek çok ispatı ortaya çıkar. Çok yakın bir tarihte ortaya atılan aşağıdaki ispatın güzelliğini okuyucuların değerlendirmelerine sunuyoruz:

> **Teorem**: Sonsuz çoklukta asal sayı vardır.
>
> **İspat:** Herhangi bir $n>1$ tamsayısı alalım. n ile $n+1$ ardışık sayıları aralarında asal olacaktır. Bu durumda $N_2=n(n+ 1)$ sayısının birbirinden farklı en az iki asal çarpanı olduğu açıktır.
>
> Benzer şekilde, $n(n+1)$ ile $n(n+1)+1$ ardışık sayıları aralarında asaldır ve $N_3=n(n+1)[n(n+1)+1]$ sayısının birbirinden farklı en az üç tane asal çarpanı vardır.

Bu yöntem her uygulandığında yeni bir asal sayı ile karşılaşırız ve yöntem hiçbir zaman durmaz. O halde sonsuz çoklukta asal sayı var olmalıdır (Alıntı: Ayhan, 2007, s.69, Saidak, 2006).

O halde, matematiğin temel teoremlerini yeniden ispatlama çabasından modern matematik akımını başlatan Bourbaki ekibinin bütün matematiği tekrar ve daha anlaşılır bir şekilde yazma arzusu ve girişimine kadar, daha yeni ve daha anlaşılır tanımlamalar ve ispatlar arayışı matematiğin mutlak mükemmelliğe sahip olmadığını ve bu nedenle bir bilim olarak gelişip yaşamaya devam ettiğini gösterir.

Buna ek olarak matematiğin bir de onu üreten matematikçiler için sorun teşkil etmesi boyutu vardır. Örneğin, Artigue (1990) pek çok ünlü matematikçinin hangi temel kavramları anlamakta ne tür güçlüklerle karşılaştıklarını göstererek matematiğin bu az bilinen boyutunu ortaya koymaktadır.

Bu durumu matematik eğitimi açısından ele aldığımızda, eğer matematiğin bazı nesneleri (tanımları, yöntemleri, ispatları, vs.) matematiği üreten matematikçileri dahi tatmin etmiyor ve hatta onlar için sorun teşkil ediyorsa, söz konusu nesnelerin matematiği sadece öğrenen konumunda olan öğrenciler için büyük sorunlar ve öğrenme güçlükleri doğurduğunu iddia edebiliriz. Bugün branş eğitimi alanında önemi büyük olan *epistemolojik engel* (*obstacle épistémologique)* (Bachelard, 1938) kavramının vurguladığı şey de aslında öğrenmelerin bu boyutu, yani her branşın bir bilim dalı olarak ortaya çıkışında, onu oluşturan öğelerin tanımlanış, algılanış ve kullanılış biçimlerinin onları öğrenenler için doğurduğu güçlüklerdir.

Bu çalışmada ortaöğretim öğrencilerinin her gün karşılaştıkları konularda dahi aslında ciddi öğrenme problemleri yaşanılabileceği gösterilmeye çalışılmaktadır. Bu nedenle öğrenciler için sorun teşkil eden bazı durumların analizine yer verilmektedir.

Yöntem

Bu çalışmada öğrenciler tarafından sorularını özgürce sorabilmeleri için tasarlanmış olan bir platforma gönderilmiş matematik soruları incelenmektedir. Söz konusu olan platformlar öğrencilerin okulda öğrenmiş oldukları bilgilerle ilgili olarak karşılaşmış oldukları problemlere yardımcı olmak amacıyla ortaya çıkan ve gönüllülük esasına göre faaliyet gösteren Internet üzerindeki matematik forumlarıdır. Söz konusu forumların işleyiş şekillerine, amaçlarına ve ortaya koymuş oldukları yaklaşımlara değinilmeden (Erdogan, 2005), onlardan sadece bir tanesi olan *Cyberpapy* forumuna bir gün içinde gelen sorulardan/alıştırmalardan iki tanesinin detaylı analizine yer verilmektedir. Fransız eğitim sistemindeki öğrencilere yönelik olarak faaliyet gösteren Cyberpapy forumu ilköğretim ikinci kademe öğrencilerinden ve lise öğrencilerinden gelen soru miktarı ve bu sorulara verilen sistematik cevaplarla dikkatimizi çekmektedir. Bu çalışmada ele alınan soruların ve cevapların genel şekliyle bu foruma gelen soruların ve onlara verilen cevapların tipik birer örneği olduğu düşünülmektedir.

Matematik alıştırmalarından matematiksel problemlere
Bir cebirsel ifadeyi çarpanlarına ayırma

Sorunun ifadesi ve forumda verilen cevap

Cyberpapy forumuna 22 Ekim 2000 tarihinde saat14:03'te bir lise birinci sınıf öğrencisi tarafından gönderilmiş olan soru ve bu soruya forumda aynı gün saat 21.35'te verilen cevap aşağıdadır:

Soru:

$f(x,y) = x^2-y^2-4x-2y+3$ veriliyor;

i) $f(2,-1)$, $f(2+\sqrt{3},-1+\sqrt{2})$ ve $f(4-x,-y-2)$ değerlerini hesaplayınız.

ii) $x=u+2$ ve $y=v-1$ alarak $f(x,y)$'yi faktörler çarpımı şeklinde yazınız. Oradan $f(x,y)$'nin çarpanlarına ayrılmış şeklini bulunuz.

iii) x bilinmeyen ve y bir reel parametre olmak üzere $f(x,y)=0$ denklemini çözünüz.

Cevap:

$f(x,y)=x^2-y^2-4x-2y+3$

i) $f(2,-1) = 2^2-(-1)^2-4.2-2.(-1)+3=0$

$f(2+\sqrt{3},-1+\sqrt{2})$ aynı: birinci denklemde x ve y yerine $2+\sqrt{3}$ ve $-1+\sqrt{2}$ yaz. O zaman sonucu 3 bulacaksın.

$f(4-x,-y-2)$: birinci denklemde x yerine 4-x ve y yerine -y-2 yaz. O zaman $f(x,y)$'yi bulacaksın.

ii) $x=u+2$ ve $y=v-1$ yazarsak,

$f(x,y)= (u+2)^2-(v-1)^2-4(u+2)-2(v-1)+3$

$= u^2+4u+4-v^2+2v-1-4u-8-2v+2+3$

$= u^2-v^2$

$= (u+v)(u-v)$

"Oradan $f(x,y)$'nin çarpanlarına ayrılmış şeklini bulunuz"

$u=x-2$ ve $v=y+1$ veriliyor. O halde

$$f(x,y) = (x-2+y+1)(x-2-y-1)$$

$$= (x+y-1)(x-y-3)$$

iii) $x+y-1=0$ veya $x-y-3=0$ olması gerekir. x bilinmeyen olduğundan $x=1-y$ veya $x=y+3$ olması gerekir. O halde çözüm kümesi Ç={1-y ; y+3} olur.

Soru ve cevabın analizi

Soruya verilen cevaba bakıldığında, sorunun bazı şıklarının çözüldüğü, bazıları için "aynı" denilerek sadece sonucunun verildiği, bazıları içinse kısa açıklamalar yapıldığı görülmektedir. Sonuç olarak söz konusu cevap belirli bir yaklaşımdan yoksun, öğrencinin bir problemle karşılaşmış olabileceği ihtimalini göz önünde bulundurmayan ve soruyu çözmek ile sorunun çözümüne yardımcı olmak gibi öğretimsel açıdan birbirinden tamamen farklı iki olayın birbirine karıştırıldığı bir yardım önerisi olarak karşımıza çıkmaktadır. Üstelik forumların doğası itibariyle, cevap verenin öğrenci ile etkileşime geçerek ve sorunun hangi kısımlarını çözemediğini, nerede güçlükle karşılaştığını sorarak, cevap vermeden önce bir fikir sahibi olabilmesi mümkündür ama bu potansiyel de kullanılmamıştır.

Şu an soruyu soran öğrenci ile iletişime geçme imkânı olmamasına rağmen soruyu ve sorunun çözüm yollarını inceleyerek öğrencinin karşılaşmış olabileceği problemler tahmin edilebilir.

İlk olarak sorunun ifadesini inceleyelim. En başta $f(x,y)=x^2-y^2-4x-2y+3$ gibi fonksiyonel bir ifade verilmiş ve bütün soru bu ifade üzerine kurulmuştur. Birinci şıkta verilen x ve y değerleri için bu ifadenin değerinin hesaplanması istenmektedir. Daha sonra birinci şıkta elde edilen hiçbir sonuca doğrudan bağlı olmayan ve fonksiyonel gösterimle değişken değiştirmenin iç içe olduğu bir çarpanlara ayırma sorusuna geçilmektedir. En sonunda ise ikinci şıkta elde edilebilecek çarpanlarına ayrılmış ifadeden yola çıkılarak ikinci dereceden bir denklemin çözümü istenmektedir.

Birinci şıkta sadece fonksiyonel dildeki değişken kavramını işlevsel hale getirmenin amaçlandığı, üçüncü şıkta ise sadece çarpanlara ayrılmış bir ifadeden yola çıkarak denklem çözmenin söz konusu olduğu görülmektedir. Bu durumda sorunun temel amacı bir ifadeyi çarpanlarına ayırmak için değişken değiştirme işlemine başvurulabileceğini göstermek olarak tanımlanabilir, öğrencinin karşılaştığı problemin ise bu değişken değiştirme işlemi ile birlikte gelen fonksiyonel dili kullanmanın doğurduğu sıkıntılardan kaynaklandığı iddia edilebilir. Kısacası iki ön hipotez olarak şunlar söylenebilir:

H1- Soruda geçen ama öğrenci tarafından açıkça ifade edilmeyen değişken değiştirme kavramını fonksiyonel dille ele almak pek çok öğrenci için önemli güçlükler doğurmaktadır.

H2- Problemin ifade ediliş şekli bu seviyede öğretilmeye başlanan, ama resmi adı olmayan bir çözüm tekniği ile karşı karşıya olduğumuzu göstermektedir. Bu konuda f(x,y)'nin u ve v'nin faktörlerinin çarpımı şeklinde ifade edilmesinin istenmesi yapılacak iş hakkında, yani f(x,y)'yi x ve y nin çarpanlarına ayrılmış şeklinde yazabilmenin nasıl olabileceği konusunda ipuçları vermektedir.

Bu hipotezleri incelememiz gerekmektedir. Ama öncelikle soru en baştan ele alındığında, belirli bir bilgi seviyesi için $x=u+2$ ve $y=v-1$ dönüşümlerine gerek kalmadan cebirsel yöntemlerle (örneğin terim ekleyip çıkartılarak ve bilinen özdeşlikler kullanılarak) bu sorunun nasıl çözülebileceği hemen görülebilir:

$$f(x,y) = x^2-y^2-4x-2y+3 = x^2-y^2-4x-2y+3+1-1 = x^2-4x+4-(y^2+2y+1) = (x-2)^2-(y+1)^2$$
$$= (x-2+y+1)(x-2-y-1) = (x+y-1)(x-y-3)$$

O halde ilk önce öğrencilerden niçin değişken değiştirmelerinin istendiğini ve böyle bir işlemin sağlayacağı avantajları anlamaya çalışalım.

Öğrencilerden cebirsel bir problemde değişken değiştirme işlemine başvurmalarının istenmesinin sebebi olarak ilk önce herhangi bir sonuç elde etmelerini garantilemenin amaçlandığı düşünülebilir. Daha net bir ifadeyle, öğrenci bu tarz bir soru ile yani ne yapacağını bilmediği bir durum ile ilk karşılaştığında cevap aramaktan vazgeçmesini önlemek amacıyla değişken değiştirme işlemi önerilebilir; bu soruda da bu nedenle önerilmiş olabilir. Bu işlem öğrenciye belirli bir aşama hakkında yön göstererek problemi üstlenmesini sağlayabilir. Bu işleme özellikle çarpanlara ayırma gibi bir konuda yer verilmesinin farklı nedenleri vardır.

İlk olarak, *çarpanlara ayırma* ifadesinin gerisinde cebir'in temel teoremi vardır (n'inci dereceden bir polinomun en fazla n tane kökü vardır). Ama lise birinci sınıf seviyesinde cebir bir teori olarak öğretilmediğinden veya öğretilemeyeceğinden, bu seviyede söz konusu teoremin bir ifadesi olarak çarpanlarına ayırma kavramı kullanılmaktadır. Bu kavram tanımlama ihtiyacı hissetmediğimiz bir kavram, yani *para-matematik*[1] bir nesnedir. Para-matematik nesnelerin özelliğini Chevallard (1991) genel olarak şu şekilde açıklamaktadır:

> Para-matematik nesneler açıkça öğretilen kavramlar değillerdir. Bunlar daha çok matematiksel kavramlar diyebileceğimiz kavramları öğretmeye ve öğrenmeye yardımcı nesnelerdir. Öğretim

[1] İsimlerin önüne gelen "para" eki Latincede yakın "yanında" anlamı taşıyıp günümüzdeki kullanım şekli ile "yaklaşık", "benzer", "neredeyse… gibi" anlamlara gelmektedir.

planında yer alan diğer kavramlar gibi öğretilmezler. Ama bu nesneler öğrenci tarafından öğrenilmeli, daha doğrusu bilinmelidir (s.49).

Diğer taraftan, problemin çözümü (halen x=u+2 ve y=v-1 dönüşümlerinin verilmemesi durumu göz önüne alındığında), öğrencinin bazı özel eşitlikleri soru içinde tanıyabilmesini gerektirmektedir. Ama bu eşitlikleri tanıyabilme kapasitesi tamamen öğrencinin sorumluluğu altındadır. Çünkü öğretmen öğrenciye bu eşitlikleri bir soru karşısında nasıl tanıyacağını açıkça öğretemez. Bu da bize öğrenciden böyle bir durum karşısında beklenen tutumun *proto-matematik*[2] (Chevallard, 1991) bir tutum olduğunu göstermektedir. Zira proto-matematik tutumların öğretimi - bu konuya tekrar döneceğiz - sözle değil, ancak bu amaç için tasarlanmış özel durumlarda gerçekleştirilebilir.

İkinci olarak, sınıf kültüründe ve özellikle ilköğretim ikinci kademe ve lise birinci sınıf seviyesinde matematiksel ifadeler genellikle karmaşıktan basite doğru gittiği için, yani sorudan cevaba doğru ifadeler sadeleştiği ve kısaldığı için, burada değişken değiştirme işleminin önerilmesinin sebebi öğrencilerin daha uzun ve daha karmaşık ifadeler elde etmekten çekinmelerini önlemek olabilir.

Şimdi değişken değiştirme işlemi konusundaki bu tespitlerden sonra birinci hipotezimize dönelim ve soruda f(x,y) gibi fonksiyonel bir ifadenin tercih edilmesiyle beraber gelen güçlükleri anlamaya çalışalım.

İlk bakışta öğrencinin sıkıntısını bir problem belirtmesi gereken ifadenin içermiş olduğu tekrardan anlayabiliriz (x=u+2 ve y=v-1 alarak f(x,y)'yi faktörler çarpımı şeklinde yazınız. Oradan f(x,y)'nin çarpanlarına ayrılmış şeklini bulunuz). Eğer "g(u,v)'yi faktörler çarpımı şeklinde yazınız" denilseydi daha uygun bir ifade kullanılmış olurdu. Ama bu ifadeyle x = u+2 ve y= v-1 alarak x ve y'nin bir fonksiyonu olan f(x,y)'nin u ve v'nin bir fonksiyonu olan g(u,v)'ye dönüştüğünün bilinmesi gerekmektedir.

Sonuç olarak burada çarpanlarına ayrılacak olan nesneyi ifade etmek için f(x,y) gösteriminin kullanıldığı, hâlbuki bu gösterimin kullanılabilmesi için, gösterimin ötesinde fonksiyon kavramı ve onunla birlikte burada devreye giren değişken kavramı hakkında temel şeylerin bilinmesinin gerektiği söylenebilir. Buradaki matematiksel problemi daha iyi anlamak için mümkün olabilecek gösterimlerin bir analizini yapabilir ve bu gösterimlerin kullanılabilme potansiyellerini sorgulayabiliriz.

---

[2] İsimlerin önüne gelen "proto" eki Latincede "ilk", "ilkel" anlamı taşıyıp beraber kullanıldığı ismin ön dönemine işaret etmektedir.

Öncelikle sorunun ifadesini hiç değiştirmeden fonksiyonel gösterimi uygun şekilde kullanmaya çalışırsak aşağıdaki sonuca ulaşırız:

$$x^2-y^2-4x-2y+3 = f(x,y) = f(u+2,v-1) = g(u,v) = (u+2)^2-(v-1)^2-4(u+2)-2(v-1)+3 = u^2-v^2$$
$$= (u+v)(u-v) = g(x-2,y+1) = (x-2+y+1)(x-2-y-1) = (x+y-1)(x-y-3) = f(x,y)$$

Hemen fark edileceği üzere, burada baştaki $f(x,y)$ fonksiyonuna dönüşün görünür bir garantisi yoktur. Çünkü ard arda yazılan eşitlikler dizisi problem doğurmaktadır. Zira buradaki eşitlikler bazen *bir nesnenin betimlenmesi* için (örneğin, $f(x,y)=x^2-y^2-4x-2y+3$), bazense *iki önermenin eşitliğini ifade etmek* için (örneğin, $u^2-v^2=(u+v)(u-v)$) kullanılmış olarak karşımıza çıkmaktadır.

Cebirsel ifadelerin yapısı formel bir yapıdır. Bu yapıda söz ve cümleler yerlerini görsel, sabit bir şekli olan ifadelere ve sembollere bırakırlar. Eşitliklerle elde edilen yazılımların doğrusallığı, hatta düşey yazılımın bile ayrı bir anlamı ve işlevi vardır. Örneğin yukarıdaki gibi eşitlikleri alt alta yazarken bir bakışta işlemler arası geçişleri görebilmek için düşey bir sıra elde etmeye çalışırız. Bu formel yapı sağladığı avantajların yanında bazen işaret ve sembollere yüklenecek anlamları algılamayı güçleştirebilir. Freudenthal'ın (1968) eşitlik kavramının yukarıda bahsedilen iki anlamı üzerine yaptığı yorum bu konuda bir fikir vermektedir:

> … Bu basit yorumda eşitlik kavramı "… ile aynı şey" şeklinde okunur. Aynı bir nesne birden fazla isim alabilir. Örneğin, "Paris" ve "Fransa'nın başkenti" aynı nesneyi ifade ederler; 9 sayısı 2+7, 10-1, 3^2, 9x1 gibi sonsuz şekilde ifade edilebilir. Bu yorumda eşitlik işareti bir matematiksel nesne olmayıp iki terimin de aynı şeyi ifade ettiğini belirtmeye yarayan anlamsal (semantik) bir işarettir.
>
> … Modern yoruma göre bir denklemin her iki parçası (sağındaki ve solundaki) aynı nesneyi tanımlar ve denklem bu özdeşliği ortaya koyan önermenin ifadesidir (s.910).

Eşitlik işaretinin kavramsal yönden doğurduğu sıkıntılar matematikçiler dışındaki diğer bilim adamlarını da her zaman yakından ilgilendirmiştir. Örneğin İngiliz Antropolog Goody (1979) denklemi eşitlik işareti ile birleştirilmiş iki miktarın denkliğini ifade eden bir formül olarak tanımlayarak bu konuda şöyle demektedir:

> Bu anlamda düşünüldüğünde, formül tamamen belirli bir fiziksel düzenlemeye bağlı olarak karşımıza çıkar. Ama bu düzenleme nicel bir denkliği gerektirir. Öncelikle bu kavramsal, soyut ve konuşma dili ile hiçbir alakası olmayan bir ifadedir. Zira eşitliği nitel anlamda düşünmek zordur. *The Encyclopedia of Philosophy*'de Benn eşitlik kavramı hakkında şöyle diyor: «A ve B eşittir önermesi» betimsel ve normatif olabilir. Ama eğer karşılaştırılan bu nesnelerin neye göre eşit olduğunu tespit etmiyorsak her iki durumda da bu önerme eksiktir. Dolayısıyla, soyutlaştırma sürecine bağlı matematiksel doğrulama ve çıkarsamalardan mantık önermelerine kadar onunla

gelen her şey eksiktir. Söz konusu olan günlük hayatın ihtiyaçlarından değil yazılı formülün soyut yapısına bağlı olarak ortaya çıkmış bir kavramdır (s.212).

Eşitlik işaretinin kavramsal boyutu ile ilgili bu yorumlardan yola çıkarak çarpanlarına ayrılacak nesneyi fonksiyonel olarak ifade etmenin ve sonuç olarak yukarıda yazılan eşitlikler zincirinin öğrencinin çalışmasına kavramsal boyutta belirli bir güçlük getirdiğini iddia edebiliriz.

O halde bu fonksiyonel kullanımı daha anlamlı hale getirebilmek için neler yapılabileceğine bakalım. Örneğin bu yazılım aşağıdaki gibi daha sembolik hale getirilebilir:

$(x,y)\rightarrow x^2-y^2-4x-2y+3$ ve $x=u+2$, $y=v-1$ için

$(x,y)\rightarrow(u,v)$ yazarsak $(u,v)\rightarrow(u+2)^2-(v-1)^2-4(u+2)-2(v-1)+3=u^2+v^2=(u+v)(u-v)$ elde edilir. $u=x-2$ ve $v=y+1$ için $(u,v)\rightarrow(x,y)$ olacağından $(x,y)\rightarrow(x-2+y+1)(x-2-y-1)=(x+y-1)(x-y-3)$ elde edilir.

Bu yazımla eşitlik işaretinin yukarıda bahsedilen dezavantajlarından kaçınılabilir. Ama bu yazımın da kendine has dezavantajları olduğu hemen görülebilir. Örneğin, değişkenler arası geçişi ifade etmek için bir öncekine oranla daha fazla sembolik araç kullanıldığından bu yazımla işlem yapabilmek güçtür. Üstelik yazımın lineer olmayışı okunma güçlüğü doğurmakta ve ortaya konan tekniğin algılanma olasılığını düşürmektedir.

Eğer yine de daha farklı şekilde yazmak istenirse verilen ifadenin x ve y değişkenlerine bağlı olduğu anlamına gelebilecek bir sembol kullanabilir. Örneğin, Freudenthal'ın (1968) önerdiği gibi, $E_{x,y}$ böyle bir sembol olsun:

$$E_{x,y}(x^2-y^2-4x-2y+3) = E_{u,v} = (u+2)^2-(v-1)^2-4(u+2)-2(v-1)+3 = u^2+v^2 = (u+v)(u-v)$$

$$= (x-2+y+1)(x-2-y-1) = (x+y-1)(x-y-3) = E_{x,y}$$

Bu yazımda, değişkenler arasındaki geçişleri ifade etmek için oklar kullanmak yerine bir gösterim olarak $E_{x,y}$ gibi bir sembol kullanılmaktadır. Bu sayede ifadeler eşitlik işareti ile birleştirilebilmektedir. Bu ise yapısal anlamda daha uygun bir yazım elde etmeyi sağlamaktadır. Freudenthal'ın (1968) da belirttiği gibi, bu yazım kabul edilebilir ama burada kullanılan $E_{x,y}$ sembolünün değişken değiştirmeyi sağlayan bir sembol olduğu ve fonksiyon anlamında kullanılmadığı elbette daha önceden bilinmeli ve o şekilde kabul edilmelidir.

Tablo1 Değişken değiştirme ile çarpanlara ayırmak için kullanılabilecek gösterimler

$x^2-y^2-4x-2y+3 = f(x,y) = f(u+2,v-1) = g(u,v)$

$= (u+2)^2-(v-1)^2-4(u+2)-2(v-1)+3 = u^2-v^2 = (u+v)(u-v) = g(x-2,y+1)$ $= (x-2+y+1)(x-2-y-1) = (x+y-1)(x-y-3) = f(x,y)$	*Fonksiyonel gösterim*
$(x,y)\to x^2-y^2-4x-2y+3$ ve $x=u+2$, $y=v-1$ için, $(x,y)\to(u,v)$ $(u,v)\to(u+2)^2-(v-1)^2-4(u+2)-2(v-1)+3=u^2+v^2=(u+v)(u-v)$ $u=x-2$ ve $v=y+1$ için $(u,v)\to(x,y)$ olacağından $(x,y)\to(x-2+y+1)(x-2-y-1)=(x+y-1)(x-y-3)$	Fonksiyonel gösterimin sembolize edilmiş hali
$E_{x,y}(x^2-y^2-4x-2y+3) = E_{u,v} = (u+2)^2-(v-1)^2-4(u+2)-2(v-1)+3 = u^2+v^2$ $= (u+v)(u-v) = (x-2+y+1)(x-2-y-1) = (x+y-1)(x-y-3) = E_{x,y}$	Sembolik gösterim

Fonksiyonel gösterimle gelen problemi bu şekilde inceledikten sonra şimdi sorunun analizinin başında belirttiğimiz diğer noktayı, yani ikinci hipotezimizi ele alalım.

Yorumlarımızın başında verilen ifadenin çarpanlarına ayrımını sağlayacak bir tekniğin söz konusu olduğunu belirttik ve bunun öğrencinin çalışmasına sağladığı avantajlardan bahsettik. Şimdi bunu biraz daha detaylı inceleyelim.

Cebirsel bir ifadede değişken değiştirme bir anlamda işlem kolaylığı sağlayan ara harflerin kullanılması olayıdır (Chevallard, Conne & Guiet, 1984). Bu ara harflerin kullanılması bir cebirsel ifadeyi daha açık yazmak için kullanılabileceği gibi, tam tersine onu daha kısa şekilde yazmak, yani çarpanlarına ayırmak için de kullanılabilir. Örneğin, $(2u+v)(u-v)$ ifadesini daha açık şekilde yazmak istediğimizi düşünelim. $c=2u+v$ dersek,

$(2u+v)(u-v) = c(u-v) = cu-cv$ yazabiliriz. Burada c yerine $2u+v$ yazarsak

$$= (2u+v)u-(2u+v)v = 2u^2+uv-2uv+v^2 = 2u^2-uv+v^2 \text{ elde edilir.}$$

Veya x^2-3x+2 ifadesini çarpanlara ayırmak istediğimizi düşünelim. Bu ifadenin çarpanlara ayrılmış şeklinin $(x+u)(x+v)$ gibi bir ifade olacağını bilerek $(x+u)(x+v)=x^2+x(u+v)+uv$ yazabiliriz. Bu durumda $a=u+v$ ve $b= uv$ dersek u ve v değerlerini belirleyebiliriz. Bu takdirde x^2-3x+2 ifadesinin a ve b değerleri $b=(-1)(-2)$ ve $a=(-1)+(-2)$ olacağından $u=-1$ ve $v=-2$ bulunur. Buradan $x^2-3x+2=(x+u)(x+v)=(x-1)(x-2)$ elde edilir.

Bu yöntemde işlemi başlatmak için kullanılan u ve v harflerinin işlem sonunda tamamen ortadan kalkması gerektiği görülmelidir. Bu nedenle burada kullanılan harflerin adı ara, yani yardımcı harflerdir.

Şimdi öğrencinin sorusunda verilen dönüşümleri ($x=u+2$ ve $y=v-1$) birer değişken değiştirme olarak değil de sadece çarpanlara ayırma amacına yönelik ara harflerin kullanımı olarak düşünecek olursak, yukarıdaki ard arda yazılan eşitliklerle gelen problem kendiliğinden ortadan kalkmış olacaktır:

$$x^2-y^2-4x-2y+3 = (u+2)^2-(v-1)^2-4(u+2)-2(v-1)+3 = u^2-v^2 = (u+v)(u-v) = (x-2+y+1)(x-2-1)$$

$$= (x+y-1)(x-y-3)$$

Ara harflerin kullanımı öğrenciler için güvenilir bir çalışma yöntemi sunabilir. Ama bu şekilde ortaya konan ara harfler tekniğinin doğası proto-matematik olduğundan öğretimi güçtür ve ancak özel durumlar tasarlayarak gerçekleştirilebilir. Chevallard'ın (1988) bu konudaki pozisyonuna tekrar dönecek olursak:

> Eğer öğrenciler bir bilgiyi nerede kullanacaklarını bilmiyorlarsa, yapılması gereken bu bilginin hangi şartlarda ve nasıl öğretildiği sorusuna geri dönmektir. Ama onları doğrudan öğretmeye çalışmak gereksiz, hatta saçmadır. Zira onlar başlı başına birer öğrenme göstergesidir (s.29).

Matematiksel nesneler konusunda ortaya konan bu yaklaşım ve söz konusu kavramlar aslında sosyolog ve filozofların bir bireyin davranışlarını belirleyen faktörleri tanımlamak ve modellemek için ortaya attıkları kavramlarla paralellik göstermektedir. Bu konuda en iyi bilinen kavramlar arasında Searle'ın (1995) kullandığı *arka plan* kavramı ve Sarazzy'nin (1996) eğitim alanı için derinlemesine incelediği Bourdieu'nun (1989) *davranış şekilleri* (*habitus)* kavramı gelmektedir. Sarazzy'nin naklettiği gibi (1996), Searle'a göre arka plan "bir bireyin sahip olduğu akli kapasite, donanım, duruş, davranma şekilleri ve tecrübelerden oluşur ve her biri bilinçli bir davranış durumunda ortaya çıkar" (s.240). Bourdieu için ise alışkanlıklar aynı arka plan kavramında olduğu gibi bir durum karşısında ortaya konacak kurallar bütünü değil ama bu "kuralların uygulanabilmesini garanti eden sürekli ve dönüştürülebilir donanımlardan oluşan sistemlerdir" (Sarazzy, 1996, s.222). Bu yazarların ortak görüşü bir kuralın nasıl uygulanacağını belirleyen bir başka kuralın olamayacağıdır. Zira bir durum karşısında uygulanacak bir kural, özellikle bu durum pratik bir bilgiyle ilgili ise, anlık bir karardır ve kuralı yorumlayıp uygulayacak olan kişinin sahip olduğu arka planla veya davranış şekilleriyle doğrudan ilişkilidir. Bu konuda Sarazzy (1996) şu örneği vermektedir:

> 4'ten sonra 6 yazmak aslında iki ekle kuralının ifadesidir. Burada 6 kuralla açıklanmış değil ama kuralın bir açıklamasıdır, aynı 10010 10008'den sonra veya 10012'den önce gelir ifadesinin bir kuralın açıklaması olduğu gibi. Eğer bir öğrenci 10012'den sonra hangi sayının geleceğini

bilmiyorsa ona kuralın yeni bir ifadesini verebilir miyiz? Hayır, "mantıklı açıklamalar zincirinin bir sonu vardır" (s.236).

Bu bakış açısından yola çıkarak proto-matematik bir nesne için bir kural veya bir tanımın verilemeyeceğini, zira bu kuralın algılanmasının başlı başına bir öğrenme belirtisi olduğunu söyleyebiliriz. Öğrencinin problem karşısında yargıda bulunarak uygulayacağı kuralı tespit etmesi esastır. Diğer taraftan, verilen her direktifin (örneğin yukarıdaki soruda kullanılabilecek değişkenlerin sorunun ifadesinde belirtilmesi) problem sonunda elde edilmesi hedeflenen kazanımı bir algoritmaya ve bir reflekse çevirdiği bilinmelidir.

O halde yapılması gereken öğrencilere önerilecek uygun problemlerle söz konusu olan bir kuralın kullanım alanı ve şekillerini keşfetmelerine imkân sağlamaktır. Asıl sorun da burada yatmaktadır. Öncelikle böyle bir kapasitenin gelişiminin bunun için tasarlanmış birkaç problemle sağlanabileceğini düşünmenin yanlış sonuçlara götürdüğü ve hedeflenen öğrenmelerin kesinlikle gerçekleşmediği bugün bilinen bir gerçektir. Ayrıca, bir nesnenin öğretilebilmesi için onun anlaşılır ve uygulanabilir bir yapıyla ortaya konabilmesi ve diğer öğretilen nesnelerle uyum içinde olması gerekir (Rajosson, 1988; Chevallard, 2002; Erdogan, 2006). Sağladığı avantajlara rağmen, özellikle bu ikinci nedenle, ara harfler tekniğinin ve bizim yukarıda ortaya koymaya çalıştığımız fonksiyonel tekniklerin öğretim konuları içinde yer alamayacağı anlaşılmaktadır.

İki reel sayı aralığının kesişimini veya bileşkesini bulma

Sorunun ifadesi ve forumda verilen cevap

Cyberpapy forumuna birinci soru ile aynı gün saat 10.59'da yine bir lise birinci sınıf öğrencisi tarafından gönderilmiş olan soru ve bu soruya aynı gün saat 20.33'te verilen cevap aşağıdadır:

<u>Soru:</u>

İki aralığın bileşkesi ve kesişimi

[-2,5) ve (-8,1] aralıklarının kesişimi için eğer $[-2,5) \cap (-8,1] \Leftrightarrow x \in [-2,1]$ dersem doğru olur mu?

$I=(-\infty,3]$ ve $J=(-1,6)$ aralıklarının bileşkesi için eğer $I \cup J=[-\infty,6)$ dersem doğru olur mu? Bana çabukça cevap verirseniz sevinirim.

Yardımınız için teşekkürler

<u>Cevap:</u>

İkinci alıştırma için cevabın yanlış. Bu $I \cup J=[-1,3]$ olmalı.

Sayıları içeren bir doğru çiz. Uç noktalarına $+\infty$ (sağa), $-\infty$ (sola) ve ortasına 0 koy. Daha sonra senin noktalarını (3,-1,6) belirle. Kırmızı bir kalemle ($-\infty$,3] aralığının altını çiz, yeşil bir kalemle (-1,6) aralığının altını çiz. Daha sonra aynı anda her iki rengin olduğu aralığı belirle ve bu aralığı yaz. İşte bu kadar !!!

Sorunun ve cevabın analizi

Hemen görüleceği üzere, ikinci alıştırma cevap veren tarafından yanlış anlaşılmış. Zaten doğru anlaşılmış olsa da verilecek cevabın soruyu soranın ihtiyacına cevap vermeyeceği görülmektedir. Zira sorunun soruluş biçimi, öğrencinin cevapta belirtilen çözüm tekniğini bilmediğini değil ama bu çözüm tekniğinin güvenilirliği konusunda sıkıntılar yaşadığını göstermektedir. Oysaki bu durum cevap veren tarafından böyle algılanmamış ve yine ilk soruda olduğu gibi sorunun gerisindeki matematiksel ve didaktik problemi yok sayacak bir cevap verilmiştir. Elbette böyle bir tekniğin güvenilir olması için ilk sorgulanması gereken reel sayı ve reel sayı aralıkları kavramlarının nasıl öğretildiği, öğrenci tarafından bu kavramların iyi bilinip bilinmediğidir. Bu konuda pek çok şey söylenebilir, ama burada bizim dikkatimizi çeken şey önerilen tekniğin matematiksel yapısıdır.

Verilen cevap aslında bir teknik ortaya koymaktan çok potansiyel bir tekniğin açıklaması olarak karşımıza çıkmaktadır: Kırmızı bir kalemle bir aralığın altını çiz, yeşille diğerinin altını çiz, iki rengin de bulunduğu yere bak… Biz yine de bunu bir teknik olarak ele alır ve buna *renkli kalem tekniği* dersek ve tekniğin içerdiği bilgilerin matematiksel ve bilişsel boyutuna bakarsak yine bir önceki soruda para-matematik ve proto-matematik nesnelerle ilgili ortaya koyduğumuz tespitlere ulaşırız. Ama biz burada bu tespitlere tekrar dönmeyip bu soruyu başka bir boyutuyla ele alacağız.

Önerilen tekniğin aslında teorik boyutu tanımlanmadığından ve diğer nesnelerle olan ilişkisi ortaya konmadığından matematiksel boyutu zayıf bir teknik, hatta matematiksel bir teknik olmaktan çok bir davranış biçimi olarak karşımıza çıkmaktadır. Söz konusu tekniğin bu alışılmadık yapısını ve bu yapıyla gelen sorunu daha iyi anlayabilmek için matematiksel aktivitenin *sembolik (sémiotique)* ve *anlamsal (sémantique)* boyutlarını derinlemesine ele almamız gerekmektedir. Biz bunu Duval'ın (1993; 996) önerdiği *sembolik ifadeler repertuarı (registres de représentations sémiotiques)* ve Bosch ve Chevallard'ın (1999) önerdiği *görsel ve görsel olmayan nesneler (objets ostensifs et non ostensifs)* kavramlarından yola çıkarak ve bu yazarlar tarafından önerilen teorik çerçeveden yararlanarak ele almaya çalışacağız.

Duval (1993) zihinsel ifadeleri "bir kişinin bir nesne, bir durum ve bunlara bağlı olan şeyler hakkında sahip olabileceği imajlar ve algılamalar bütünü" olarak; anlamsal ifadeleri ise "kendine ait avantajları, dezavantajları ve işleyiş şekilleri olan bir ifade sisteminin işaretlerinin kullanımından ortaya çıkan ürünler" olarak tanımlamaktadır (grafiksel repertuar, cebirsel repertuar, fonksiyonel repertuar, vs.). Sonuç olarak, matematiksel düşünce sisteminin gelişmesinde sembolik ifadeler repertuarlarının oynadığı role vurgu yapmakta ve matematiksel nesnelerin anlaşılmasının ancak eş zamanlı olarak birden fazla sembolik ifade repertuarının harekete geçirilmesiyle, ya da bir repertuarın sağladığı avantajlardan dolayı bir diğerine oranla tercih edilmesi ve kullanılmasıyla gerçekleşebileceği fikrini savunmaktadır.

Bosch ve Chevallard (1999) ise iki tip matematiksel nesneden bahsetmektedirler. Görsel nesneler "aktif bir doğası olan, belirli bir materyal boyutu olan ve bu nedenle bireyler için görülebilir bir gerçekliği olan" nesneler olarak; görsel olmayan nesneler ise "fikirler, kurumlar veya kurumsal olarak var olan kavramlar" olarak, hatta bir kişiden çok bir düşünce sisteminin sahip olduğu kavramlar olarak tanımlanmaktadırlar. Bu yazarlara göre görsel nesneleri diğerlerinden ayıran özellik onların manipüle edilebilir (evirilip-çevrilebilir) olmalarıdır. Örneğin logaritma fonksiyonunun gösterimi görsel bir nesne iken logaritma fonksiyonu kavram olarak gösterimi gibi manipüle edilebilir olmadığından dolayı görsel olmayan bir nesnedir.

Yukarıdaki tanımlardan yola çıkarak anlamsal ifadeler repertuarını görsel olmayan nesnelerin belirttiği kurallar doğrultusunda manipüle edilen görsel nesneler kümesi olarak düşünebiliriz. Bosch ve Chevallard'ın (1999) pozisyonun da bu olduğu aşağıdaki paragraftan anlaşılmaktadır:

> Bir problemin çözümü için ortaya konacak bir teknik görsel olmayan nesneler doğrultusunda görsel nesnelerin manipülasyonu olarak ifade edilebilir. Görsel nesneler aktivitenin gözle görülen yani yapılan bir işte, o işi yapan tarafından olduğu kadar dışarıdan bir gözlemci tarafından da görülmeye ve gözlemlenmeye fırsat veren nesnelerdir (s.92).

Bu yaklaşımlar çerçevesinde öğrencinin sorduğu soru ve bu soruya verilen cevap incelendiğinde, aralıkları görebilmek için ilk önce grafik repertuarının harekete geçirilmesi gerektiği görülmektedir. Daha sonra öğrenci tarafından sözel veya yazısal repertuar sayı doğrusu üzerinde yapılan şeyin ne olduğunu açıklamak için harekete geçirilmelidir. Ayrıca bir de belki jestsel repertuarın sayıların yerini ve sonsuzun yerini göstermek için harekete geçirilebileceği görülebilir. En sonunda ise, grafik repertuarında elde edilen verilerin eşitsizliklerin cebirsel repertuarına dönüştürülmesi gerekmektedir.

Şimdi, renkli kalem tekniğinden başka bir teknik geliştirmek istersek aşağıdaki şekilde çalışabiliriz:

Matematikte iki kümenin kesişimini ifade eden "$\cap$" sembolü konuşma dilinde "ve" anlamına; iki kümenin birleşimini ifade eden "$\cup$" işareti ise "veya" anlamına gelmektedir. Dolayısıyla "ve" ve "veya" kavramlarının anlamları üzerine kurulabilecek bir başka teknik ortaya koymak mümkündür. Bu teknikte "ve" ifadesi yukarıdaki teknikte önerilen her iki renge karşılık gelen aralığa, "veya" ifadesi de bütün renkli bölgeye karşılık gelen aralığa denk gelir. Sembolik boyutta ise teknik aşağıdaki şekilde ortaya konabilir.

Verilen iki aralığın kesişimi için;

x herhangi bir reel sayı olmak üzere, eğer $x \in [-2,5) \cap (-8,1]$ ise $x \in [-2,5)$ ve $x \in (-8,1]$

O halde, $-2 \leq x < 5$ ve $-8 < x \leq 1$

$\Leftrightarrow$ ($-2 \leq x$ ve $x < 5$) ve ($-8 < x$ ve $x \leq 1$)

$\Leftrightarrow$ ($-2 \leq x$ ve $-8 < x$) ve ($x < 5$ ve $x \leq 1$)

Buradan $-2 \leq x$ ve $x \leq 1$ ise $-2 \leq x \leq 1$ olacağından sonuç olarak $[-2,5) \cap (-8,1] = [-2,1]$ elde edilir.

Verilen iki aralığın birleşimi için; $I = (-\infty,3]$ ve $J = (-1,6)$ olmak üzere;

Eğer $x \in I \cup J = (-\infty,3] \cup (-1,6)$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty,3]$ veya $x \in (-1,6)$

$\Leftrightarrow$ ($-\infty < x \leq 3$) veya ($-1 < x < 6$)

$\Leftrightarrow$ ($-\infty < x$ ve $x \leq 3$) veya ($-1 < x$ ve $x < 6$)

$\Leftrightarrow$ ($-\infty < x$ veya $-1 < x$) ve ($-\infty < x$ veya $x < 6$) ve ($x \leq 3$ veya $-1 < x$) ve ($x \leq 3$ veya $x < 6$)*
$\Leftrightarrow$ ($-\infty < x$) ve R ve R ve ($x < 6$)

$\Leftrightarrow$ $-\infty < x$ ve $x < 6$ ve sonuç olarak da $-\infty < x < 6$ olacağından $I \cup J = (-\infty,6)$ elde edilir.

Buradan yola çıkarak, iki reel sayı aralığının kesişimi veya birleşimini bulmak için en az iki teknik ortaya konulabileceğini söyleyebiliriz. Birinci teknik renkli kalem tekniği, ikincisi ise yukarıda açıkladığımız tekniktir. Bu incelemede söz konusu olan bir tekniğin diğerinden daha iyi veya daha kötü olduğu hakkında karar vermek değildir. Zaten böyle bir kararın anlaşılabilirlik, uygulanabilirlik, genelleştirilebilirlik (Chevallard, 1997) gibi ölçütler doğrultusunda alınması gerekmektedir. Amacımız her tekniğin kendine ait avantajları ve dezavantajlarını ve onlarla birlikte öğrencilerin çalışmalarında karşılaşabilecekleri güçlükleri tespit etmektir. Renkli kalem tekniğinin özellikle sembolik planda matematiksel boyutunun zayıf olduğunu ve güvenilirliğini sağlayacak diğer matematiksel nesnelerden yoksun

* P, Q, R, S den her biri birer matematiksel önerme olarak kabul edilirse $(P \cap Q) \cup (R \cap S)$ ifadesi $(P \cup R) \cap (Q \cup R) \cap (P \cup S) \cap (Q \cup S)$ ifadesine denktir.

olduğunu daha önce belirttik. Bizim ortaya koyduğumuz tekniğin formel ve lojik yapısının ise onu lise birinci sınıf seviyesinde öğretmeye izin vermediği görülebilir.

Sonuç olarak, hem renkli kalem tekniği ile beraber gelen grafiksel repertuarı hem de bizim ortaya koyduğumuz tekniğin gerisindeki cebirsel ve sembolik repertuarı kullanarak ortaya konacak etkili, anlaşılabilir ve genelleştirilebilir bir tekniğe duyulan ihtiyaç ve eksikliğinde yaşanılan problemler ortadadır.

Sonuç

Bir bilim dalı olarak matematik eğitimi son 20-30 yılda gelişmeye başladı. Öğrencilerin kavram yanılgılarını incelemekle başlayan çalışmalar ve araştırma konuları bugün farklılaşıp zenginleşerek onlarla, yapılan yayınların ve bu alanda bütün dünyada çalışan araştırmacıların sayısı on binlerle ifade edilir hale geldi. Genel itibariyle alan eğitiminin öğrenci, öğretmen ve bilgi üçgeninden oluştuğu kabul edilmekle beraber, öğrenmelerde karşılaşılan problemler genellikle öğrenci veya öğretmen kaynaklı olarak ele alınmaktadır. Dolayısıyla bu problemlerin söz konusu olan bilginin doğasından da kaynaklanabileceği fikrini benimseyen ve bunu bir araştırma değişkeni olarak gören çalışmalar özellikle ülkemizde henüz yeterli seviyeye ulaşmamıştır.

Bir seçim olarak kabul edilebilecek bu durum matematik eğitimi konuları arasında önemi büyük olan ders programı içeriği hazırlama, ders programı inceleme ve geliştirme çalışmaları söz konusu olduğunda bir eksiklik olarak karşımıza çıkmaktadır.

Biz bu çalışmada, ilk bakışta öğrencilere hiçbir güçlük doğurmayacak gibi görünen bazı problemlerin derinlemesine matematiksel ve epistemolojik analizlerini yaparak aslında matematiksel nesnelerin, ders programlarının, ders kitaplarının ve öğrencilere önerilen çalışmaların göründüğü kadar uyumlu ve sorunsuz bir yapı teşkil etmediğini ve bu alanda gerçekleştirilecek pek çok çalışma olduğunu göstermeye çalıştık. Bir taraftan matematiksel içeriği inceden inceye analiz edecek çalışmalar, diğer taraftan bu içeriğin hangi şartlar altında öğretilebileceğini anlamaya ve tasarlamaya imkân verecek teori ve yaklaşımlar hiç kuşkusuz bu çalışmaların başında gelmektedir.

Kaynakça

Akyıldız, E. (1998). Ord. Prof. Dr. Cahit Arf Üzerine Anılarım. *Bilim ve Teknik Dergisi (Eylül eki), 363,* 4-5.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et Didactique. *Recherche en Didactique des Mathématique, 10* (2.3), 241-286.

Ayhan, D. (2007). Asalların sonsuzluğunun yeni bir kanıtı (daha!), *Matematik Dünyası 73*(2),69.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique.* Paris : Librairie J. Vrin.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19* (1), 77-124.

Bourdieu, P. (1989). *Le sens pratique*. Paris: Les Editions de Minuit.

Chevallard, Y., Conne, F., & Guiet, J. (1984). Jalons à propos d'algèbre. *Interactions Didactiques, 3*, 1–54.

Chevallard, Y. (1988). L'univers didactique et ses objets: fonctionnement et dysfonctionnement. *Interactions Didactiques*, *9,* 9-35.

Chevallard, Y. (1991). *La Transposition Didactiqu: Du Savoir Savant au Savoir Enseigné.* Grénoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *17* (2), 17-54.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude, Ecologie et Régulation. In Dorier Jean-Luc (Ed), 11. *Ecole d'été de Didactique des Mathématiques* (pp. 41-56). La Pensée Sauvage.

Cyberpapy Forumu: (http://www.cyberpapy.com)

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16* (3), 349-382.

Erdogan, A. (2005). Forums on Internet: tools for teaching and learning? *Proceedings of the Biltek2005: International Informatics Congress* (pp.94-102). Eskişehir,Turkey.

Erdogan, A. (2006). *Le diagnostic de l'aide à l'étude en mathématiques: analyse didactique des dificultés relatives à l'algèbre et aux fonctions en Seconde*. Thèse de doctorat, Université Paris 7, accesible par: http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00261943.

Freudenthal, H.G. (1968). Notation mathématique: In *Encyclopaedia Universalis* (Vol.11, pp. 908-914). Londres.

Goody, J. (1979). *La raison graphique. La domestication de la pensée sauvage*. Paris: Les Editions de Minuit.

Rajosson, L. (1988). *Analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique.* Thèse de doctorat, Université d'Aix Marseille.

Saidak, F. (2006). A new proof of Euclid's theorem. *Amer. Math. Montly, 113* (10), 937-938.

Sarazzy, B. (1996). *La sensibilité au contrat didactique. Rôle des arrière-plans dans la résolution de problèmes d'arithmétique au cycle trois*. Thèse de doctora, Université de Bordeaux II.

Searle, J. (1995). *La redécouverte de l'esprit*. Paris: Gallimard.