Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri • Educational Sciences: Theory & Practice - 11(1) • Kış/Winter • 465-499

Tek Değişkenli Fonksiyonların İki Değişkenli Fonksiyonlara Genellenmesi, Fonksiyon Makinesi ve APOS

Tangül (UYGUR) KABAEL[a]
Anadolu Üniversitesi

Öz

Bu araştırmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmenliği programı, Analiz II dersini alan öğrencilerin fonksiyon kavramını tek değişkenden iki değişkene genellemelerinin incelenmesidir. Öğretim sürecinde genel fonksiyon kavramını iki değişkenli fonksiyonlara genellemeyi destekleyici öğretim etkinlikleri, çoklu temsil, temsiller arası geçiş ve alan yazında bilişsel bir kök olarak bunları desteklediği öne sürülen fonksiyon makinesi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. APOS teorik çerçevesinin kullanıldığı araştırmanın verileri, öğrencilerin bilişsel gelişimlerini izlemek amacı ile tek ve iki değişkenli fonksiyonlar konularında hazırlanan ikişer test ve dönem sonunda altı öğrenci ile yapılan klinik görüşmeler ile toplanmıştır. Araştırmanın sonunda öğrencilerin iki değişkenli fonksiyon kavramını oluşturmalarında, genel fonksiyon kavramını anlama seviyelerinin ve üç boyutlu uzay bilgilerinin temel olduğu görülmüştür. Ayrıca, öğrencilerin iki değişkenli fonksiyonları anlama seviyeleri konusunda önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler

Fonksiyon Kavramı, İki Değişkenli Fonksiyon Kavramı, APOS, Fonksiyon Makinesi.

Matematik eğitimcileri yaptıkları çalışmalar ile matematiğin temel taşlarından biri olan fonksiyon kavramına hak ettiği önemi vermişlerdir. Buna karşın, fonksiyonlar konusuna ilişkin alan yazına kaydedilen öğrenci güçlük ve yanılgıları ile halen sınıf ortamında ya da günümüzde sürdürülen çalışmalarda sıklıkla karşılaşılmaktadır. Fonksiyon kavramının formal tanımına ilişkin alan yazında rastlanan yanılgılar, öğrencilerin fonksiyon kavramını eksik ya da hatalı bir biçimde, örneğin "*bir eşleme*", "*bir formül*" ya da "*bir denklem*" gibi tanımlamalarından kaynaklanmaktadır (Vinner ve Dreyfus, 1989). Çalışmalarda ortak olarak ortaya çıkan yanılgılardan biri de öğrencilerin bir temsil durumunun fonksiyon olup olmadığını belirlemede "*bilindik*" ya da diğer bir deyişle "*alışılmış*" olup olmamasına göre karar vermeleridir. Örneğin çemberi "*bilindik*" olması gerekçesi ile bir fonksiyon grafiği ya da verilen bir parabolü, kollarının hangi değişkene ait ekseni sardığını göz önüne almaksızın fonksiyon grafiği olarak belirleme davranışına sıklıkla rastlanmaktadır. Bakar ve Tall (1991) İngiltere'de lise ve üniversite öğrencileri ile yaptıkları bir çalışmada, eksenleri saran parabollerin fonksiyon belirtip belirtmediğinin belirlenmesi konusunda hangi değişkenin bağımsız değişken olarak ele alındığının önemsenmediğini görmüşlerdir. Bakar ve Tall, lise öğrencilerinin tamamının, üniversite öğrencilerinin ise %97 sinin y-eksenini saran parabolü; diğer yandan, lise öğrencilerinin %95-inin, üniversite öğrencilerinin de %80-inin x-eksenini saran parabolü fonksiyon olarak belirlediği sonucuna ulaşmışlardır. Bu çalışmanın araştırmacısı ise, Amerika Birleşik Devletlerinde yaptığı çalışmada (Montiel, Vidakovich ve Kabael, 2008) alan yazında sıkça karşılaşılan ve Bakar ve Tall'un

a Dr. Tangül (UYGUR) KABAEL. Matematik alanında Yardımcı Doçenttir. Çalışma alanları arasında ileri matematiksel düşünme, APOS öğrenme teorisi, analiz öğretimi yer almaktadır. İletişim: Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, Matematik Öğretmenliği, Yunus Emre Kampüsü, Eskişehir. Elektronik Posta: tuygur@anadolu.edu.tr. Tel: +90-222-3350580-3406 Fax: +90-222-3350573.

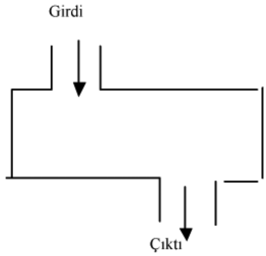
(1991) elde ettiği bu kavram yanılgılarını elde etmiştir. Montiel ve arkadaşları nitel olarak desenleyerek, verilerini açık uçlu sorulardan oluşan test ve klinik görüşme yolu ile elde ettikleri çalışmada, 15 üniversite öğrencisinin 10 tanesinden *y=3* eşitliğinin fonksiyon olmadığı yanıtını almışlardır. Öğrenciler bu yanıtlarına gerekçe olarak ise, *y=3* matematiksel ifadesinde "*değişken*" ya da "*değişim*" olmamasını göstermişlerdir.

Fonksiyon kavramının öğretimine ilişkin olarak ise çoklu temsil yaklaşımı son yirmi yılda çoğu matematik eğitimcisinin ortak savunusu haline gelmiştir (Breidenbach, Hawks, Nichol ve Dubinsky, 1992; Carlson, Oehrtman, Thompson, 2007; Ferrini-Mundy ve Graham, 1990; Janvier, 1987; Sierpinska, 1992; Yerushalmy, 1997). Carlson ve Oehrtman (2005) fonksiyonları denklem gibi görme yanılgıları ile ilişkili olarak, öğrencilerin fonksiyonlar ile denklemler arasındaki ayırımı yapmaları için desteklenmeleri gerektiğini, bu desteklemeye örnek olarak da, belirli bir *f* fonksiyon için *f(x)=6* gibi bir denklemin çözüm kümesinin sorulabileceğini belirtmişlerdir. Carlson ve Oehrtman bu soruda, fonksiyonun *6* değerindeki çıktısı için fonksiyonun girdi değerlerini hem cebirsel hem de grafiksel olarak sormanın, öğrencilerin bir denklem çözümünü fonksiyon sürecinin tersi olarak görmelerini sağlayacağını vurgulamışlardır. Ayrıca, öğrencileri bu tür bir karmaşadan kurtarmak için, fonksiyon kavramının aynı fonksiyonun çoklu temsilleri vurgulanacak biçimde çeşitli örnekler ile verilmesini önermektedirler. National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989) standartları da tüm öğrencilerin, fonksiyonları grafik, tablo, denklem ve sözel olarak temsil edebilmeleri, bu temsillerin analizlerini ve temsiller arası geçişleri yapabilmeleri gerektiğini vurgulamaktadır. Bununla birlikte Bower ve Lobato (2000), çoklu temsilin kaçınılmaz olmasının yanı sıra, öğrencilerin temsiller arası geçişi bildikleri halde neyin temsil edildiğini öğrenememe durumunun da olabildiğini belirtirler. Christou, Elia ve Gagatsis (2004) temsiller arası geçişin anlaşılmasını destekleyici teorik çerçeve ve alternatif öğretim yaklaşımlarının gerekliliğine değinirler. Tall, McGoven ve DeMarois'in (2000) fonksiyon kavramının öğretiminde bir "*bilişsel kök (cognitive root)*" olarak önerdikleri "*fonksiyon makinesi (girdi- çıktı makinesi)"* modeli böyle bir öğretim yaklaşımına örnek verilebilir.

Bilişsel Kök Olarak Fonksiyon Makinesi

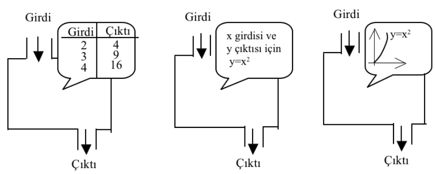
Tall ve arkadaşlarına göre (2000, s. 3) "*bilişsel kök*"

- Öğrenme sürecinin başında öğrenciler için ana bilginin anlamlı bir bilişsel birimidir,
- Anlamlı bir bilişsel yeniden oluşturmadan ziyade, bir bilişsel gelişim stratejisi ile başlangıç gelişimi sağlar,
- Sonraki gelişim sürecinde uzun süreli anlam olasılığı içerir,
- Daha karmaşık anlama gelişim sürecinde kullanışlı kalacak kadar dayanıklıdır.



Şekil 1.
Fonksiyon Makinesi

Tall ve arkadaşları ayrıca "*fonksiyon makinesi (girdi- çıktı makinesi)"* modelinin, fonksiyon kavramının çoklu temsillerini içeren bir "*bilişsel kök*" olduğunu vurgulamışlardır.



Şekil 2.
Fonksiyon Makinesi ve Fonksiyon Temsilleri

İki Değişkenli Fonksiyonlar

İleri matematiğin temel kavramlarından biri olan iki değişkenli fonksiyonlar, matematik ve matematik eğitimi başta olmak üzere, fen ve matematik içerikli çoğu bölüm öğrencileri için önem taşımaktadır. İki değişkenli fonksiyonların anlaşılması, genel fonksiyon bilgisinin yanı sıra tek değişkenli fonksiyonların pek çok önemli özelliğinin iki bağımsız değişkene taşınmasını gerektirdiğinden, bu kavram çoğu öğrenci için güçlük kaynağı haline gelmektedir. Ayrıca, fonksiyonların geometrik özellikleri iki değişkenli fonksiyonlara, yeterli düzeyde üç boyutlu geometri bilgisi ve görselleştirme becerisi ile genellenebildiğinden, iki değişkenli fonksiyonların geometrik özelliklerini anlama, öğrenciler için daha da güçleşmektedir. Matematik eğitimi alan yazını, fonksiyon kavramına hak ettiği önemi vermesine karşın, söz konusu iki değişkenli fonksiyonlar olduğunda alan yazında oldukça az sayıda çalışma ile karşılaşılmaktadır. Umut verici olan ise son yıllarda bu konuda yapılan çalışmaların sayısının artış göstermesidir. Yerushalmy'nin (1992) iki değişkenli fonksiyonların çoklu temsilleri konusunda yaptığı çalışmanın ardından Trigueros ve Martinez-Planell (2009) iki değişkenli fonksiyonların geometrik temsilleri üzerine yaptıkları çalışmalar ile alana katkı sağlamışlardır. Bir kavramın öğrenilme sürecinin ortaya koyulması, o kavramın ve ilişkili diğer kavramların öğretimlerinin geliştirilmesine yol açacağından, matematik eğitimi alan yazının yüksek matematiğin temel kavramlarından olan iki değişkenli fonksiyon kavramının öğrenilme sürecini aydınlatabilecek çalışmalara olan ihtiyacı açıktır. Yerushalmy (1997) ve Trigueros ve Martinez-Planell yaptıkları çalışmalar iki değişkenli fonksiyonların öğrenilme sürecinin belirlenmesi yolunu açmışlardır. İki değişkenli fonksiyonların öğrenilmesinin, genel fonksiyon bilgisinin tek bağımsız değişkenden iki bağımsız değişkene genellenmesi ile mümkün olabileceği göz önüne alınarak, fonksiyon kavramının tek değişkenden iki değişkene nasıl genellendiğini araştırmayı amaçlayan bu çalışmanın da bu kavramın öğrenilmesinin açığa çıkarılması yolunda oldukça önemli olduğu düşünülmektedir.

Trigueros ve Martinez-Planell, fonksiyonların görselleştirme gerektiren geometrik özelliklerinin anlaşılmasının, fonksiyonların farklı temsillerini ilişkilendirmeyi gerektirdiğini vurgulamışlardır. Yerushalmy (1997) ise, tek değişkenli fonksiyonları, iki değişkenli fonksiyonlara genellemenin karmaşıklığının; hem fonksiyon kavramına, hem de bu kavramın temsillerine bağlı olduğunu ifade etmiştir. Yerushalmy, fonksiyon kavramını iki değişkenli fonksiyonlara genelleme sürecinde, çoklu temsiller ve temsiller arası ilişkinin önemi üzerinde durmuştur. Trigueros ve Planell (2009), temsillerin öğretiminin, farklı temsillerin birbirine dönüştürülmeleri yolu ile ilişkilendirilerek yapılmasının ve bu öğretimin fonksiyon kavramına ilişkin soyut bilgiler verilmeden önce gerçekleştirilmesinin önemini vurgulamışlardır. Trigueros ve Planell çalışmalarında, fonksiyonların tablo temsiline yer vermediklerini ancak bunun tablo temsilinin daha az önemli olması anlamına gelmediğini, aksine fonksiyonların çoklu temsillerinin mutlaka tablo temsilini içermesi gerektiğini vurgulamışlardır. Bu çalışmanın öğretim sürecindeki yaklaşım, Yerushalmy (1997) ve Trigueros ve Planell'in de vurguladığı ve fonksiyon kavramına ilişkin alan yazında da ortak savunu haline gelmiş çoklu temsiller ve temsiller arası geçişleri içermektedir. Öğretim sürecinde ayrıca, alan yazında fonksiyonların çoklu temsillerini desteklediği ve fonksiyon kavramının öğretiminde bir bilişsel kök olduğu öne sürülen fonksiyon makinesi kullanılmıştır.

Araştırmanın Amacı

Bu çalışma; İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programının Analiz II dersi bağlamında, öğrencilerin iki değişkenli fonksiyon kavramını nasıl oluşturduklarının araştırılması üzerine kurulmuştur. İki değişkenli fonksiyonlar, genel fonksiyon kavramının, tek bağımsız değişkenden iki bağımsız değişkene genellenmesi ile mümkün olduğundan, öğrencilerin iki değişkenli fonksiyonları oluşturmaları, Analiz II dersi boyunca fonksiyon kavramını genelleme süreçlerindeki gelişim izlenerek araştırılmıştır. İki değişkenli fonksiyonların öğretim sürecinde, fonksiyon kavramının öğretimindeki etkisi pek çok çalışma ile ortaya konulmuş ve ilgili alan yazında ortak savunu haline gelmiş çoklu temsil ve temsiller arası geçiş yaklaşımının yanı sıra, çoklu temsilleri desteklediği öne sürülen fonksiyon makinesi kullanılmıştır. Dolayısı ile, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programının, Analiz II dersini alan öğrencilerinin fonksiyon kavramını, tek bağımsız değişkenden iki bağımsız değişkene genelleme süreçlerini inceleme genel amacı kapsamında, fonksiyon kavramının iki değişkenli fonksiyonlar için başlıca önkoşul bilgi olmasının yanı sıra, iki değişkenli fonksiyonların öğrenilmesinin yeterli düzeyde üç-boyutlu geometri bilgisi gerektirdiği de göz önüne alınarak aşağıdaki sorulara yanıt aranmıştır:

1. Öğrencilerin iki değişkenli fonksiyon kavramını oluşturmaları ile genel fonksiyon kavramını anlama seviyeleri arasındaki ilişki nedir?

2. Öğrencilerin iki değişkenli fonksiyon kavramını oluşturmaları ile üç boyutlu uzay bilgileri arasındaki ilişki nedir?

3. Öğrencilerin sahip oldukları tek değişkenli ve iki değişkenli fonksiyonlara ilişkin kavram tanımları arasındaki ilişki nedir?

4. Fonksiyon makinesinin, öğrencilerin tek değişkenli ve iki değişkenli fonksiyon kavramlarını anlamaları üzerine etkileri nelerdir?

Teorik Çerçeve

Bu araştırmada, lisans düzeyinde kullanılan özel bir program geliştirme ve araştırma çerçevesi olan APOS teorik çerçevesi kullanılmıştır. APOS burada kısaca açıklanacak olup, daha fazla detay için Asiala ve arkadaşlarının (1996) da yaptıkları çalışmaya başvurulabilir.

Bir kavramın öğrenilme sürecinde geliştirilebilecek özel zihinsel yapılandırmaları içeren *genetik ayrıştırmasını (genetic decomposition)* belirlemeyi amaçlayan *APOS* araştırma çerçevesi; teorik analiz, öğretim ve öğrencilerin öğrenmelerinin değerlendirilmesi olmak üzere üç bileşene sahiptir. Başlangıç aşamasında *genetik ayrıştırmanın* ilk formu belirlenir. Bu belirleme, öğrenme teorisinin teorik çatısı altında ve kavramın, önceki ilgili çalışma ya da çalışmaların sonucu, alan yazın taraması ve araştırmacıların matematik bilgileri ile geliştirilen epistemolojisi ile yapılır. Genetik ayrıştırmanın ilk formu belirlendikten sonra öğretim desenlenir ve uygulanır. Öğrenciler tarafından ne gibi zihinsel oluşturmaların gerçekleştiğinin araştırılmasında çeşitli veri toplama araçları kullanılabilir. Genetik ayrıştırma gerektiği kadar sayıda veri toplanması ve analizin sonucunda elde edilir.

APOS Öğrenme Teorisindeki Anlama Seviyeleri

APOS teorisine göre bireyin oluşturabileceği zihinsel yapılandırmalar *eylem (action), süreç (process), nesne (obje)* ve *şema (schema)* olarak isimlendirilir. Birey eylemi yansıttığında ve içsel bir işlem oluşturduğunda, eylemi bir sürece *içselleştirir* (*interiorize)* denir. Eylem, süreç üzerinde uygulandığında ise matematiksel bir nesne olarak içerilmiş *(encapsulate)* olur. Şema ise bireyin zihninde eylem, süreç, nesne ve diğer şemaların uyumlu bir koleksiyonudur.

Fonksiyon Kavramını Anlama Seviyeleri: Fonksiyonlar, APOS öğrenme teorisinin kurucularından Ed Dubinsy ve çalışma arkadaşları tarafından öğrenilme seviyeleri üzerine çalışılmış ilk kavramlardandır (Breidenbach ve ark., 1992; Dubinsky, 1991; Dubinsky ve Harel, 1992). Yapılan bu çalışmalara göre, fonksiyon kavramını anlama seviyesi eylem olan bir öğrenci, cebirsel formülü ile verilen bir fonksiyonun girdi ya da çıktı değerlerini hesaplayabilir. Buna karşın, bir fonksiyon formülü üzerinde hesaplama yapmaksızın bir temsilin fonksiyon olup olmadığı yorumunu yapma, bir fonksiyonun tersi kavramı ya da bir türev alma sonucunun yine bir fonksiyon olduğu bilgisi, eylem seviyesinde olan bir öğrenci için güçlük oluşturur. Dubinsky'e göre (1991) öğrencilerin çoğunun fonksiyon bilgisi "*formül*" ile sınırlıdır ve böyle bir öğrencinin fonksiyonlar için tipik bir örneği, x^2+3 şeklinde bir cebirsel ifadedir. Bunun yanında Dubinsky, böyle bir öğrencinin tanım ve değer kümesi bilgilerine sahip olmadığını ve fonksiyonları grafikleri ile ilişkilendiremediğini ifade eder. Öğrenci, fonksiyonu bağımsız değişken denilen girdi ile bağımlı değişken olan çıktı arasında bir eşleme olarak görebiliyorsa ve bir girdiye uygulanan bazı işlemler sonucunda tek bir çıktı elde edildiğini algılayabilmişse, fonksiyonları anlaması süreç seviyesindedir. Fonksiyon kavramının süreç olarak bilincinde olan ve gerektiğinde başka eylem ya da süreçleri fonksiyonlara uygulayarak, fonksiyonları matematiksel nesne olarak görebilen öğrencinin kavramı anlaması ise nesne seviyesine ulaşmıştır. Örneğin, fonksiyon kavramını anlaması nesne seviyesinde olan bir öğrenci, fonksiyonlar kümesinde dört işlemi ya da bileşke işlemlerini kavrayabilir ve çeşitli durumlarda uygulayabilir. Dubinsky'e göre fonksiyonlar ile ilişkili bir durumu algılama, o duruma nesneler üzerinde bir eylem olarak bakabilme anlamına gelir. Yani bu durumda, eylem içselleştirilmiştir. Dubinsky fonksiyon kavramını anlama seviyesi süreç olan bir öğrencinin, fonksiyonun grafiği ile fonksiyon sürecini birlikte çalışabileceğini belirtir. Diğer bir deyişle, süreç düzeyindeki bir öğrenci grafiğin, yatay eksen üzerindeki bir x noktasındaki yüksekliğinin $f(x)$ değeri olduğunu kavramıştır. Bu durum öğrencinin grafiğin fiziksel şekli ile fonksiyonun davranışını ilişkilendirebilmesi anlamına gelir. Dubinsky ve Harel (1992), fonksiyonları anlamanın süreç seviyesinin oldukça karmaşık olduğu ve aşağıda verilen dört faktörü içerdiği sonucuna ulaşmışlardır:

1. Fonksiyonların ne olduğuna ilişkin öğrencilerin sahip oldukları kısıtlamalar: Gözlenen üç ana kısıtlama vardır:

(a) *Manipülasyon kısıtlaması (the manipulation restriction)*: Bu kısıtlamaya sahip bir öğrenci belirli bir manipülasyon uygulamalıdır ya da fonksiyona sahip değildir.

(b) *Nicelik kısıtlaması (the quantity restriction)*: Bu kısıtlamaya göre girdi ve çıktılar sayı olmalıdır.

(c) *Süreklilik kısıtlaması (the continuity restriction)*:Bu kısıtlamaya sahip bir öğrenci için bir grafik, eğer bir fonksiyonu temsil ediyorsa sürekli olmalıdır.

2. Katılık Kısıtlaması *(severity of the restriction)*: Bazı öğrenciler bir durumu fonksiyon olarak belirleyebilmek için, verilen bir girdiye karşılık gelen çıktıyı bulabilecekleri belirli bir cebirsel ifadeyi bilmek isterler. Diğer öğrenciler için ise nasıl manipülasyon yapılacağı bilgisine sahip olmasalar dahi, bir ifadenin varlığı yeterlidir.

3. Hiçbir şeyin belirgin olmadığı durumda bir süreç oluşturma becerisi ve böyle bir oluşturmada öğrencinin otonomisi.

4. Sağa teklik koşulu; 1-1 olma ile karıştırma: Dubinsky ve Harel (1992) bu konunun süreç seviyesinde kavrama ile ilişkili olduğunu iddia etmişlerdir. Dubinsky ve Harel'e göre öğrenciler arasında sıklıkla karşılaşılan bu karmaşa ancak fonksiyon kavramının süreç seviyesinde anlaşılması ile çözüme kavuşabilir. Fonksiyon süreci bilgisi, sonlanan noktanın tekliğini gerektirirken fonksiyonun 1-1 (bire-bir) olması başlangıç noktasının tekliği ile ilgilidir.

Fonksiyon kavramını anlaması nesne seviyesine gelmiş bir öğrenci ise, dönüşümlerin süreçler üzerinde eylem olabileceğini kavrayabilmiştir. Yani, bu seviyedeki bir öğrencinin fonksiyonların toplamı ya da çarpımı gibi işlemleri algılaması, fonksiyonların bir nesne olarak algılanmasını içermektedir. Kavramı anlamadaki bilişsel gelişimi şema seviyesine ulaşmış bir öğrenci ise, bu gelişim sürecini tamamlamıştır ve kavramı gereken başka her duruma aktarabilir.

Yöntem

Öğrencilerin genel fonksiyon kavramını tek bağımsız değişkenden iki bağımsız değişkene genelleyerek iki değişkenli fonksiyonları oluşturma süreçlerini inceleyen bu çalışmada genelleme sürecinde öğrencilerin ne gibi zihinsel oluşumlar geliştirdikleri ile ilgilenildiğinden çalışma İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programının Analiz II dersi bağlamında nitel olarak desenlenmiştir.

Katılımcılar

Çalışmanın sürdürüldüğü devlet üniversitesinin Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programında Analiz II dersi alan öğrenci sayısına göre iki ya da üç grup halinde açılmaktadır. Nnitel araştırmalarda araştırmacı, bizzat alanda zaman harcayan, araştırma kapsamındaki kişilerle doğrudan görüşen ve gerektiğinde bu kişilerin deneyimlerini yaşayan, alanda kazandığı bakış açısını ve deneyimlerini toplanan verilerin analizinde kullanan kişidir (Yıldırım ve Şimşek, 2003, s. 23). Çalışmanın yapıldığı 2007-2008 öğretim yılında Analiz II dersi, öğretim elemanı farklı olmak üzere iki grup olarak açılmış olduğundan, kolay ulaşılabilir durum örneklemesi yöntemi (Yıldırım ve Şimşek) kullanılarak iki ders grubundan araştırmacının öğretim elemanı olduğu, 23 öğrenciden oluşan grup, araştırmanın katılımcıları olarak belirlenmiştir. Analiz II dersi kapsamında iki değişkenli fonksiyonların öğretimi sürecinde öğrencilerin fonksiyon kavramını tek değişkenden iki değişkene genellemelerini araştırmak amacı ile geliştirilen bir dizi ölçme aracının (açık uçlu sorulardan oluşan testler) 23 öğrenciye uygulanmasının ardından, altı öğrenci amaçlı örnekleme yöntemlerden biri olan ölçüt örnekleme yöntemi kullanılarak görüşme yapılmak üzere seçilmiştir. Ölçüt örnekleme, önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan bütün durumların çalışılmasıdır (Yıldırım ve Şimşek). Bu bağlamda görüşme yapılacak öğrencilerin seçiminde, açık uçlu testlerden elde edilen verilerin, fonksiyon kavramının APOS öğrenme teorisine göre belirlenmiş anlama seviyeleri kullanılarak yapılan analizi sonuncunda, hem tek değişkenli hem de iki değişkenli fonksiyonlara ilişkin anlama seviyeleri (en az) *süreç* olarak belirlenmiş olmak ölçüt olarak kullanılmıştır. Bilişsel seviyeleri en az süreç olarak belirlenmiş öğrenciler arasında yapılan seçim, testler boyunca gösterdikleri kavramsal gelişimleri, seçildikleri sınıfı yansıtacak biçimde çeşitlilik gösteren öğrencilerden yana yapılmıştır.

Veri Toplama Araçları ve Veri Toplama Süreci

Çalışmada veri toplama aracı olarak açık uçlu test ve klinik görüşme teknikleri kullanılmıştır. Açık uçlu testler, öğrencilerin fonksiyon kavramını iki değişkenli fonksiyonlara genelleme sürecinde, öğrencilerin fonksiyon kavramını anlama seviyelerini en az süreç ya da eylem şeklinde değerlendirme amaçlı, fonksiyon kavramını anlama seviyelerinin alan yazında elde edilen ölçütlerine göre hazırlanmıştır. Alan yazında ilgili çalışmalarda fonksiyon kavramını en az süreç ya da eylem seviyesinde belirlemeye ilişkin ölçütlerin başlıcaları; kavramın tanımı, farklı temsil durumlarının fonksiyon olup olmadığının araştırılması ve temsiller arası geçiş konularında olduğundan, testlerin soru maddeleri, temsil durumlarının fonksiyon (iki ya da tek değişkenli) olup olmadığını belirleme, fonksiyon temsilleri arası geçiş ve iki ya da tek değişkenli fonksiyon tanımı olmak üzere üç kategoriden oluşmaktadır. Çalışmada testlerin paralel anlamda hazırlanmasından kast edilen, testlerin bu üç kategoriden soru maddeleri içermesidir. Dubinsky ve Harel (1992)' in belirttiği gibi, bir öğrencinin fonksiyon kavramını anlama seviyesini bir ya da iki tip temsil durumunun fonksiyon olup olmadığını belirleme sorusuna verdiği yanıt ile tahmin etmek oldukça güçtür. Dubinsky ve Harel'e göre bir öğrenci, bir temsil durumuna verdiği yanıttaki fonksiyon bilgisini bir diğer temsil durumunda göz ardı edebilir ya da açık olarak ifade edemeyebilir. Dolayısı ile bu çalışmada hazırlanan testlerde kullanılan temsillerin her birinden en az üç farklı durum verilmiştir. Bunun yanında, öğrencilerin fonksiyonları anlama seviyelerini ölçmede, bir fonksiyon temsilini bir diğer temsile dönüştürmelerinin ve bir ya da iki değişkenli fonksiyonları tanımlamalarının istenildiği soru maddeleri de kullanılmıştır. Temsil olarak tek değişkenli fonksiyonlar konusunda hazırlanan ilk iki testte cebirsel, geometrik ve tablo temsilleri ve bu temsiller arası dönüştürmeler kullanılmıştır. İlk iki testten elde edilen sonuçlara göre bilişsel seviyesi düşük öğrencilerin bile tablo temsillerinde fonksiyon durumlarını başarı ile algıladıkları görüldüğünden, iki değişkenli fonksiyonlar konusunda hazırlanan testlerde geometrik ve cebirsel temsil görevlerine yer verilmiştir. Ayrıca iki değişkenli fonksiyonların geometrik temsillerini algılama durumlarını değerlendirmede kullanılmak üzere öğrencilere grafik temsilinden tanım ve değer kümesi bulma görevleri de verilmiştir.

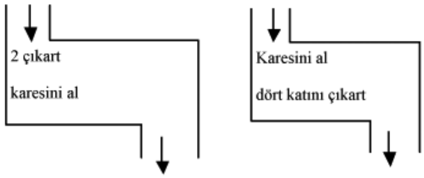
Nitel araştırmada geçerliğin ve güvenirliğin sağlanmasında kullanılan önemli ölçütlerden biri, "veri çeşitlemesi" (triangulation) dir (Yıldırım ve Şimşek, 2003). Bu araştırmanın geçerlik ve güvenirliğini sağlamak amacı ile açık uçlu testler ve klinik görüşmeler ile veri çeşitlemesi yapılmıştır. Ayrıca çalışma kapsamında hazırlanan testlerin önce kapsam geçerliliğinin sağlanması için bir alan uzmanının görüşleri alınmıştır. Her bir testin güvenilirliğini ölçmek için pilot uygulaması yapılmış ve ardından testten elde edilen veriler birinin araştırmacı olduğu iki alan uzmanı tarafından kodlama yoluyla nitel olarak analiz edilmiştir. Uzmanlarının kodlamalarının büyük ölçüde tutarlı olduğu görülmüş (birinci test; %89, ikinci test; %91, üçüncü ve dördüncü testler; %94) ve bu yolla testlerin güvenirliği sağlanmıştır (Miles ve Huberman, 1994).

Genel fonksiyon kavramı, iki değişkenli fonksiyonların öğrenilmesinde başlıca ön-koşul bilgiyi oluşturduğundan ve bu çalışma öğrencilerin iki değişkenli fonksiyonların tek değişkenden iki değişkene genelleme süreçlerini araştırmayı amaçladığından, öğrencilerin Analiz II dersi başında fonksiyon kavramına ilişkin bilişsel seviyelerini belirlemek amacı ile açık uçlu sorulardan oluşan bir test geliştirilmiş ve uygulanmıştır. Testin uygulanmasının ardından gelen dört ders saati, fonksiyon kavramının kısaca tekrarına ayrılmıştır. Bu kısa öğretim sürecinde, fonksiyon makinesi kullanılarak fonksiyonların çoklu temsilleri ve temsillerin birbirlerine dönüştürülmeleri üzerinde özellikle durulmuştur. Fonksiyon kavramının benimsenen bu öğretim yaklaşımı ile yeniden gözden geçirilmesinin ardından, öğrencilerin fonksiyon kavramına ilişkin bilişsel seviyelerinde herhangi bir değişim olup olmadığını ölçmek amacı ile önceki ölçme aracına paralel olarak ikinci bir test hazırlanmış ve uygulanmıştır. Ardından iki değişkenli fonksiyonların öğretim süreci başlatılmıştır. Bu süreçte de fonksiyon makinesi iki değişkenli fonksiyonların öğretiminde bilişsel kök olarak kullanılmıştır. Ayrıca ders kapsamında iki değişkenli fonksiyonların çoklu temsillerini (özellikle cebirsel ve geometrik), temsiller arası geçişi ve temsillerin tek değişkenden iki değişkene genellenmesini destekleyici öğretim etkinliklerine önem verilmiştir. Bu etkinlikler sırasında aynı temsillerde, genel fonksiyon bilgisini genelleyebilecekleri tek ve iki değişkenli fonksiyon örnekleri ele alınmıştır. Örneğin $f(x)=1$ cebirsel temsili ile verilen tek değişkenli sabit fonksiyonun grafik temsilinin belirlenmesi, tanım ve değer kümelerinin her iki temsilden elde edilmesi gibi alıştırmaların ardından $f(x,y)=1$ cebirsel temsili ile verilen iki değişkenli sabit fonksiyonun benzer incelemesine geçilmiş ve bu yolla iki fonksiyonun cebirsel ve grafik temsillerinin karşılaştırılmasının yapılması sağlanmıştır. Bununla beraber, iki değişkenli fonksiyonların geometrik temsilleri ve diğer temsilleri ile geometrik temsiller arası geçişler, bazı özel yüzeylerin çizim yollarından sonra verilmiştir. Teorik çerçeve bölümünde bahsedildiği gibi, çeşitli temsil durumlarının fonksiyon olup olmadığını belirleyebilme fonksiyon kavramını anlama seviyeleri arasında ayırt edici bir davranış olduğundan (Dubinsky, 1991), öğrencilere cebirsel ya da geometrik temsillerin iki değişkenli fonksiyon olup olmadığını belirleme konusunda pek çok görev verilmiştir. Ayrıca, çeşitli cebirsel ve geometrik iki değişkenli fonksiyon temsillerinden tanım ve değer kümesi bulma alıştırmaları üzerinde de önemle durulmuştur. Böylece iki değişkenli fonksiyonların öğretim sürecinin ardından, tek değişkenli fonksiyonlar konusunda uygulanan ilk iki teste paralel anlamda iki değişkenli fonksiyonlar konusunda bir açık uçlu test hazırlanmıştır. Bu testin uygulanmasından sonra iki değişkenli fonksiyonların limit, süreklilik, yönlü türev ve ardından katlı integral bilgilerinin öğretim süreci başlamıştır. Bu sürecin yani Analiz II ders sürecinin sonunda yine önceki uygulanan testlere paralel anlamda iki değişkenli fonksiyonlar konusunda ikinci test hazırlanmış ve uygulanmıştır.

Öğrencilerin fonksiyon kavramını tek değişkenden iki değişkene genelleme sürecinde uygulanan testlerin kodlama yolu ile nitel analizinden sonra veri toplama aracı olarak klinik görüşme tekniği kullanılmıştır. Klinik görüşme, öğrencilerin düşünme yapılarını, bilişsel süreçlerini derinlemesine anlamaya yardımcı olabilen ve dolayısıyla da matematik eğitiminde sıkça kullanılan bir görüşme tekniğidir (Clement, 2000; Ginsburg, 1981). Tek ve iki değişkenli fonksiyon kavramlarına ilişkin bilişsel seviyeleri (en az) süreç düzeyine ulaşmış öğrenciler arasından, katılımcılar alt başlığı altında belirtildiği gibi klinik görüşmeler için yapılan öğrenci seçiminin ardından klinik görüşme soruları hazırlanmıştır. Hazırlanan klinik görüşme sorularının uzman görüşüne sunularak aşağıdaki gibi son şekli verilmiş ve Analiz II dersini almakta olan bir öğrenciye uygulanarak pilot çalışması yapılmıştır.

1. Sana göre fonksiyon nedir?

2.



• *Yukarıdaki şekiller sana ne hatırlatıyor?*
• *Yukarıdaki şekillerin temsil ettiği fonksiyonlar nedir?*

3. Yukarıdaki makinelerin temsil ettiği fonksiyonlar arasında ilişki var mıdır? Varsa nedir?

4. Aşağıdaki gösterimlerin anlamı nedir?

$* f : D_f \subset \Re \to \Re$ $* f^{-1}$ $* f \circ g$

5. Girdileri fonksiyonlar olan bir fonksiyon söyler misin?

Gerekli olduğunda alt sorular:

* Fonksiyon makinesi diye bir şey hatırlıyor musun?

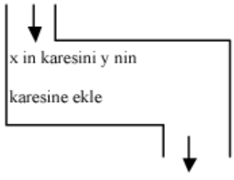
* Bir fonksiyon makinesinin girdileri üzerinde herhangi bir kısıtlama var mıdır?

* Bir fonksiyon makinesinin girdileri de fonksiyon olabilir mi?

* Böyle bir fonksiyon makinesi biliyor musun?

6. İki değişkenli fonksiyon nedir?

7.



Yukarıdaki makinenin temsil ettiği fonksiyon nedir?

8. $z = f(x, y) = 5$ cebirsel temsili fonksiyon mudur? Neden? Bu cebirsel ifadeyi grafik ile temsil eder misin?

9. $z = x^2 + y^2$ cebirsel ifadesi ile temsil edilen fonksiyonun grafik temsilini verir misin? Bu fonksiyonun tanım ve değer kümesini bulur musun? Nasıl buldun?

10.

(x,y)	(2,1)	(3,2)	3,1)	4,4)
f(x,y)	1	3	6	4

x	1	3	4	6
g(x)	2	6	8	12

Yukarıda verilen tablolara göre g(f(x,y)) cebirsel ifadesinden bahsetmek mümkün müdür? Bu cebirsel ifade ne anlama gelir? Aşağıdaki değerleri hesaplar mısın?

$* g(f (3,2)$ $* g(f (4,4))$

Alan yazında verilen (Carlson ve ark., 2007; Dubinsky, 1991; Dubinsky ve Harel, 1992) ve çalışmanın önceki bölümlerinde bahsedilen fonksiyon kavramını süreç seviyesinde anlamanın başlıca ölçütleri ve görüşme sorularında bu ölçütler ile ilişkili görevler aşağıdaki gibidir:

- Bir fonksiyonu her girdiyi tek bir çıktıya dönüştüren bir girdi-çıktı süreci olarak tanımlama ya da açıklama (soru 1 ve 6)
- Fonksiyon olup olmama durumlarını algılama (soru 8)
- Bir fonksiyon durumunu başka bir temsile dönüştürme (2, 7, 8 ve 9. sorular)
- İki fonksiyonun eşitliğini algılama (soru 3)
- Bir fonksiyonun tanım ve değer kümelerini bulma (soru 9)
- İki fonksiyonun bileşkesi sürecini algılama (soru 10)

Yukarıda belirtilen ölçütlerin dışında, öğrencilerin bilişsel seviyelerini görebilmek için öğrencilerin soruların tamamına verdikleri yanıtlara bir bütün olarak bakılmıştır. Bunun yanı sıra öğrencinin bir fonksiyonu nesne olarak görüp göremediği, görüşme sorularının dördüncü ve beşinci maddesi ile de sorgulanmak istenilmiştir.

Görüşmelerde bu sorulara yanıt aranırken, öğrencilerden gelen ifadelere göre, yönlendirme yapmaksızın düşünme biçimlerini derinlemesine ortaya koymalarını sağlayacak biçimde "neden?", "nasıl düşündün" gibi soru biçimleri seçilmiştir.

Klinik görüşmeler, testlerden elde edilen verilerin analizleri sonucunda tek ve iki değişkenli fonksiyonlara ilişkin bilişsel seviyeleri en az süreç olarak belirlenmiş öğrencilerin bilişsel seviyelerinin, süreç mi yoksa daha ileri seviyeler olan nesne ya da şema mı olduğunu belirlemenin yanı sıra, verilerin güvenirliği için veri çeşitlemesini (data triangulation) sağlamak amacı ile uygulanmıştır. Klinik görüşmelere başlanmadan önce öğrencilere, görüşmelerin ne amaçla ve nasıl kullanılacağı açıklanmış ve kendilerinden görüşme izni alınmıştır. Görüşmeler sırasında öğrencilere çalışma kâğıdı verilmiş ve sorular görüşmeci tarafından sözel ifade edilirken aynı zamanda çalışma kâğıdına yazılmıştır. Öğrencilerden soruları yanıtlarken sesli düşünmeleri ve aynı zamanda soruların yazılı çözümleri için çalışma kâğıdını kullanmaları istenilmiştir. Ayrıca, çalışma kâğıdına hatalı yazımda bulunduklarında silmemeleri, çalışma kâğıdında bir alt satıra devam etmeleri konusunda istekte bulunulmuştur. Ortalama 40 dakika süren görüşmeler ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınmıştır. Öğretim süreci boyunca dersin öğretim elemanı olan ve görüşmeci olarak öğrencilerle görüşen araştırmacı, çalışma boyunca tarafsızlığını korumuş olup, dersin öğreticisi olmasının görüşmelerde öğrencileri etkilememesi açısından görüşmeleri Analiz II dersinin dönem sonu sınavından sonra uygulamıştır.

Analiz

Araştırmadan elde edilen veriler alan yazın destekli olarak kodlama yolu ile nitel olarak analiz edilmiştir. Analizler fonksiyon kavramının Dubinsky ve arkadaşları (Breidenbach ve ark., 1992; Dubinsky, 1991; Dubinsky ve Harel, 1992) tarafından APOS çerçevesinde belirlenen anlama seviyelerinin belirlenme ölçütlerine göre yapılmıştır. Paralel anlamda soru maddeleri, temsil durumlarının fonksiyon (iki ya da tek değişkenli) olup olmadığını belirleme, fonksiyon temsilleri arası geçiş ve iki ya da tek değişkenli fonksiyon tanımı olmak üzere üç kategoriden oluşan testlerin analiz sonuçlarının karşılaştırılması da bu üç kategorideki ölçütlere göre yapılmıştır.

Öğrencilerin fonksiyon bilgisine ilişkin açıklamaları farklı temsil durumlarında ya da test maddelerinde tutarlı olamayabileceğinden, öğrencilerin fonksiyonları kavramaları sorulara verdikleri yanıtlar bir bütün olarak ele alınarak analiz edilmeye çalışılmıştır. Dubinsky' e göre (1991) fonksiyonlara ilişkin bilişsel seviyesi süreç olan bir öğrenci, bir temsil durumunun fonksiyon olup olmadığını algılayabilir ve bir fonksiyon temsilini başka bir temsile dönüştürebilir. Bu nedenle testlerin analizinde, fonksiyon durumlarını yalnız tablo temsillerinde algılayabilmiş ve fonksiyonların grafik, cebirsel ve tablo temsilleri arasındaki dönüştürmeleri yapabilmiş bir öğrencinin fonksiyonları anlama seviyesi oldukça zayıf süreç olarak belirlenmiştir. Fonksiyon durumlarını yalnız tablo temsillerinde algılayabilmiş öğrenci aynı zamanda temsiller arası dönüştürmeler konusunda da başarısız ise anlama seviyesinin eylemden sürece geçiş olduğu sonucuna varılmıştır. Eğer öğrenci fonksiyon durumlarının hiçbirini algılamamış ise anlama seviyesi eylem olarak belirlenmiştir.

Öğrencilerin ilk testte fonksiyon kavramı için verdikleri tanımlar göze alındığında, çoğu öğrencinin manipülasyon kısıtlamasına, bu öğrencilerin bazılarının ise aynı zamanda nicelik kısıtlamasına sahip oldukları görülmüştür. Ayrıca, çoğu öğrencinin grafik temsillerinin fonksiyon belirtip belirtmediği araştırması için önce grafik temsillerini cebirsel temsillere çevirdikleri yani bir durumun fonksiyon olup olmadığını araştırmak için manipülasyon yapabilecekleri belirli bir ifadeye ihtiyaç duydukları görülmüştür. Dolayısıyla bu öğrencilerin katılık kısıtlamasına sahip oldukları sonucuna varılmıştır. Diğer yandan bütün temsillerdeki fonksiyon durumlarını algılayan ve cebirsel, grafik ve tablo temsilleri arasında dönüştürme yapabilen bir öğrencinin anlama seviyesinin ise en az süreç olabileceği yorumu yapılmıştır. Öğrencilerin bilişsel gelişimlerini incelemeyi kolaylaştırmak amacı ile paralel anlamda hazırlanan diğer testlerden elde edilen veriler de benzer yolla analiz edilmiştir. Örneğin verilen grafik ve cebirsel temsillerden iki değişkenli fonksiyonları algılayabilen bir öğrencinin iki değişkenli fonksiyonlara ilişkin anlama seviyesi en az süreç olarak yorumlanırken böyle bir öğrenci ayrıca verilen grafik temsillerini önce cebirsel temsillere çevirip fonksiyon durumlarını cebirsel temsiller ile araştırmış ise anlama seviyesi katılık kısıtlamalı süreç olarak belirlenmiştir.

Genel fonksiyon kavramının APOS çerçevesinde geliştirilmiş olan anlama seviyeleri iki değişkenli fonksiyonları anlama seviyelerine de bir öngörü oluşturmaktadır, ancak matematik eğitimi alan yazınının iki değişkenli fonksiyonları anlama seviyelerinin belirlenmesine olan gereksinimi tartışılmazdır. Bu çalışmanın uygulama sürecinde, öğrencilerin tek ve iki değişkenli fonksiyonlara ilişkin bilişsel gelişimlerinin izlenmesini kolaylaştırmak amacı ile öğrencilerin iki değişkenli testlere verdikleri yanıtlar, genel fonksiyon kavramını anlama seviyeleri kullanılarak analiz edilmiş ve bu yolla öğrencilerin iki değişkenli fonksiyonlara ilişkin bilişsel seviyeleri belirlenmeye çalışılmıştır.

Öğrencilerin iki değişkenli fonksiyonlara ilişkin ilk test olan üçüncü teste verdikleri yanıtlar incelendiğinde hemen hemen bütün öğrencilerin grafiği verilen bir fonksiyonun tanım ve değer kümesini bulmada güçlük yaşadıkları görülmüştür. Bu öğrencilerin bazıları yüzeyin izdüşümünü başarılı bir biçimde alamasalar bile, iki değişkenli bir fonksiyonun tanım ve değer kümelerinin elemanlarının sırasıyla ikililer ve gerçel sayılar olduğunun bilincindedirler. Dolayısıyla, bu öğrencilerin anlama seviyeleri, eğer fonksiyon durumlarını algılayabilmiş iseler süreç olarak belirlenmiştir. Bu öğrencilerden grafik temsillerinin fonksiyon olup olmama durumlarını araştırmak için önce cebirsel temsilleri belirlemeye çalışanların ise anlama seviyeleri katılık kısıtlamalı süreç olarak tahmin edilmiştir. Geri kalan öğrencilerden bazılarının ise, iki değişkenli fonksiyonların tanım ve değer kümesi bilgisi ile ilgili boyut güçlüğü yaşadıkları görülmüştür. Örneğin bazı öğrenciler iki değişkenli fonksiyonun tanım ya da değer kümesinin elemanını *(x,y,z)* şeklinde üçlüler ile vererek tanım ve değer kümesi bilgileri ile ilgili ciddi güçlükleri olduğunu ortaya koymuşlardır. Eğer böyle bir öğrenci, grafik ve cebirsel temsillerde fonksiyon durumlarını başarıyla algılamış ise iki değişkenli fonksiyonları anlama seviyelerinin zayıf süreç olduğu tahmin edilmiştir. Böyle bir öğrenci ayrıca fonksiyon durumlarını algılamada güçlük yaşamış ise bilişsel seviyesinin eylem olduğu sonucuna varılmıştır. Diğer yandan, iki öğrencinin tüm soru maddelerinde başarılı olduğu ancak cebirsel yaklaşıma sahip oldukları, yani fonksiyon durumlarını grafik temsillerinde araştırıyor olsalar bile cebirsel temsile geçiş yapmaya çalışarak fonksiyon durumlarını belirledikleri görülmüştür. Bu öğrenciler, iki değişkenli fonksiyonlar konusunda olan ilk testtin birinci ve ikinci maddelerinde fonksiyon durumlarını algılamanın dışında, üçüncü maddede tanım ve değer kümelerini başarıyla elde edebilmişlerdir. Bu öğrencilerin tek güçlük yaşadıkları noktanın grafik temsilleri olduğu görülmüştür. Çoğu öğrenci gibi, grafik temsillerinde fonksiyon durumlarını cebirsel temsile dönüştürerek algılayabilmişlerdir. Yani, grafik temsilinden cebirsel temsile geçerek fonksiyon durumlarını algılamışlar, ancak üç boyutlu geometri bilgisi ve görselleştirme ile yaşadıkları güçlükler nedeni ile fonksiyon süreci ile yüzey grafiğini ilişkilendirememişlerdir. Bu bulgular sonucunda bu öğrencilerin bilişsel seviyelerinin en az süreç olduğu tahmin edilmiştir.

İki değişkenli fonksiyonlar konusunda olan son testin bulguları da önceki testlere benzer olarak analiz edilmiştir. Öğrencilerin bir kısmı Analiz II dersinin içeriğini oluşturan iki değişkenli fonksiyonlar üzerine kurulmuş kavramların öğretimi sürecinde iki değişkenli fonksiyonlara ilişkin bilişsel durumlarını geliştirmişlerdir. Bu öğrenciler elde ettikleri gelişim ile son testte fonksiyon durumlarını grafik ve cebirsel temsillerde sırasıyla düşey doğru testini kullanarak ve cebirsel analiz ile algılayan, grafik temsili verilen bir fonksiyonun tanım ve değer kümelerini başarı ile belirleyebilen bireyler haline gelmişlerdir. Bu öğrenciler bilişsel seviyeleri en az oldukça güçlü süreç olarak belirlenmişlerdir.

Bulgular

Burada açık uçlu testlerden elde edilen bulgular betimsel olarak verilecek, fonksiyon kavramını anlama seviyelerine göre yapılan alan yazın destekli analiz sonuçları çerçevesinde öğrencilerin öğretim sürecindeki gelişimleri ise görüşülen öğrencilerin bulguları ile detaylandırılacaktır.

Tek Değişkenli Fonksiyonlar Konusunda Olan Testlerin Bulguları

Birinci testteki grafik ve cebirsel temsillerde, bağımsız değişkeni x olan fonksiyon durumlarının istenildiği ilk maddelerine verilen yanıtlardan öğrencilerin çoğunun fonksiyon kavramını göz ardı ederek bağımsız değişken kavramına odaklandıkları görülmüştür. Bu öğrenciler bağımsız değişkeni x olan durumları, yalnızca cebirsel temsillerde değil grafik temsillerinde de cebirsel temsile geçerek cebirsel çözümleme ile incelemeye çalışmışlardır. Örneğin bu öğrencilerin bazılarının cebirsel temsilin *y=f(x)* şeklinde yazılıp yazılmamasına göre x in bağımsız değişken olup olmadığına karar verdikleri görülmüştür. Geriye kalan öğrencilerin bazıları ise (beş öğrenci) *y=4* cebirsel ifadesinin "x" içermediği düşüncesi ile yalnızca bu sabit fonksiyonu bağımsız değişkeni x olan durum olarak seçmişlerdir. Diğer yandan bir öğrencinin ise, hem cebirsel hem de grafik temsillerinde sabitin dışındaki şıkların tamamını fonksiyon durumu olarak seçtiği görülmüştür. Bazı öğrencilerin bağımsız değişkeni x olan fonksiyon durumunu araştırmadaki faktörü ise "bilindik olma" dır. Bir öğrenci grafik ve cebirsel temsillerden sırası ile cebirsel temsilleri "$y=4$" ve "$y=x^2$" olan fonksiyonları bilindik oldukları gerekçesi ile bağımsız değişkeni x olan fonksiyon olarak seçmiştir. Bir başka öğrenci de aynı gerekçe ile grafik ve cebirsel temsillerde cebirsel ifadesi "$y=x^2$" olan parabolü seçmiştir. İlk testte elde edilen bu bulguların tersine ikinci testte 23 öğrencinin 13 ü hem grafik hem de cebirsel temsillerde fonksiyon durumlarını başarıyla algılayabilmişlerdir. Yalnızca dört öğrenci fonksiyon yerine bağımsız değişken kavramına odaklanarak araştırma yapmaya devam etmiştir. İlk testte öğrencilerin çoğunun (16) fonksiyon durumlarını algılayabildikleri tek temsil tablo temsili olmuştur. Cebirsel formülü kullanarak verilen çıktıya karşılık gelen girdiyi bulma konusunda her iki testte de öğrencilerin tümünün başarılı olduğu görülmüştür. Grafik temsilini tablo temsiline dönüştürme konusunda ise 23 öğrenciden 17'si ilk testte başarı göstermiştir. Bu dönüştürme görevinde hatası olan öğrencilerin ise fonksiyonun süreksiz olduğu noktadaki çıktıyı algılayamadıkları görülmüştür. Hemen hemen bütün öğrenciler (iki öğrenci hariç) cebirsel formülü verilen parçalı fonksiyonun grafiğini çizebilirken, bu öğrencilerin 12'si verilen fonksiyonun değer kümesini göz ardı ederek üst yarı-çember yerine tam çember çizmişlerdir. Birinci teste benzer olarak ikinci testte de alt yarı-çemberin cebirsel temsili verilerek grafiği istenilmiştir. İlk testte yarı çember yerine tam çember çizen öğrencilerin çoğu ikinci testte değer kümesini de göz önüne alarak doğru sonuç vermişlerdir. İkinci testte yalnızca dört öğrenci fonksiyon olamayacağını düşünmeksizin tam çember grafiği çizmiştir.

Birinci testte fonksiyon tanımı olarak Vinner ve Dreyfus'un (1989) elde ettiği tanımlara benzer çeşitli tanımlara ulaşılmıştır. İlk testte yalnızca dört öğrenci eksiksiz tanım vermeyi başarmıştır. Bu öğrenciler fonksiyonu tanım kümesindeki elemanları değer kümesinden yalnızca bir elemana eşleyen bağıntı olarak tanımlamışlardır. Diğer öğrenciler tanımlarındaki sınıfı "*terim*", "*kural*", "*işlemlerin bir dizisi*", "*değişkenlerin bir sistemi*" ya da "*ifade*" olarak vermişlerdir. Birinci ve ikinci testlerde verilen tanımlar karşılaştırıldığında, öğrencilerin bu anlamdaki bilişsel gelişimlerinin şaşırtıcı olduğu görülmüştür. İkinci testte 18 öğrenci, girdi-çıktı, girdinin çıktıya sağa teklik koşulu ile dönüşmesi bilgilerini içeren doğru tanım vermişlerdir. Bu öğrencilerin çoğu tanımdaki sınıfı bağıntı olarak, geri kalanı da eşleme olarak belirlemişlerdir. On sekiz öğrencinin dışında kalan beş öğrenciden üçünün de girdi-çıktı ve girdinin çıktıya dönüşmesini içeren tanım verdiği ancak bu öğrencilerden birinin sınıfı kural, ikisinin ise makine olarak belirledikleri görülmüştür.

İki Değişkenli Fonksiyonlar Konusunda Olan Testlerin Bulguları

İki değişkenli fonksiyonlar konusunda en şaşırtıcı sonuç neredeyse bütün öğrencilerin (21) cebirsel yaklaşıma sahip olmasıdır. Yani bu öğrenciler, grafik temsillerinde fonksiyon durumu araştırması yaparken de önce cebirsel temsile dönüştürme yapmaya çalışarak cebirsel inceleme yapma eğiliminde olmuşlardır. Bu öğrencilerden 19'u grafik temsillerinde cebirsel yaklaşımla doğru seçim yapmışlardır. Buna karşın, bu öğrencilerin ancak 17'si fonksiyon sürecini algılayabilmiş gibi gözüküyordu. Geriye kalan iki öğrencinin ezbere cebirsel analiz yaptıkları anlaşılıyordu. Cebirsel yaklaşıma sahip bu öğrencilerden sekizinin tek değişkenli fonksiyonlar konusunda olan ilk testte yani dersin başında da cebirsel yaklaşıma sahip olduğu görülmüştür. Daha sonra tek değişkenliler konusunda olan ikinci testte yani fonksiyon makinesi ile fonksiyon kavramının tekrar gözden geçirilmesinin ardından, grafik temsillerinde cebirsel formül olmaksızın fonksiyon durumu araştırması yapmayı geliştirdikleri görülmüştür. Başka bir deyişle, bu öğrenciler tekrar gözden geçirme ile cebirsel yaklaşımlarını terk etmişler ancak iki değişkenli fonksiyonların öğretim sürecinin başında tekrar kazanmışlardır. Daha sonra bu öğrencilerin dördü, iki değişkenli konuların öğretim süreci ile dönem boyunca cebirsel yaklaşımlarını tekrar terk etmiş ve fonksiyon süreci ile grafiği ilişkilendirerek fonksiyon durumunu grafik üzerinde inceleme becerisini kazanmışlardır. Yani bu öğrenciler dönem sonunda fonksiyon durumlarını grafik üzerinde düşey doğru testi ile araştırmışlardır. Geriye kalan dört öğrenci ise bütün testlerde cebirsel yaklaşım sergilemişlerdir. On üç öğrencinin son testte iki değişkenli fonksiyon durumlarını grafik üzerinde düşey doğru testi ile incelemeyi kazanmış olmaları önemli bir gelişme olarak görülmüştür.

İki değişkenli fonksiyonlar konusunda olan ilk testte bağımsız değişken kavramında sahip olduğu karmaşadan kurtulamayan bir öğrenci hariç, öğrencilerin tamamı verilen cebirsel temsilleri $z=f(x,y)$ şeklinde ifade ederek cebirsel analiz yolu ile doğru sonuçlara ulaşmışlardır. Diğer yandan bu öğrencilerden dördünün bu cebirsel analizi, fonksiyon sürecini yani, girdi-çıktı ve girdinin çıktıya dönüşümü bilgisini algılamaksızın yaptıkları görülmüştür. Bu öğrenciler ifadelerinde ezbere cebirsel analiz yaptıklarını ortaya koymuşlardır.

Öğrencilerin iki değişkenli kavramların öğretim sürecinin ardından uygulanan son testte ezbere cebirsel analiz yapmayı terk ettikleri görülmüştür.

Öğrencilerin çoğu (23 öğrenciden 19'u) son testte parçalı şekilde verilen cebirsel ifadenin fonksiyon olamayacağını algılamışlardır. Ayrıca beş öğrenci, verilen parçalı cebirsel ifadeyi önce grafik temsiline dönüştürmüş ve düşey doğru testini kullanarak fonksiyon olamayacağını algılamışlardır. Bu öğrencilerin son testin grafik temsiller içeren ilk sorusunda da düşey doğru testini kullandıkları görülmüştür. Geri kalan öğrencilerin dördü de parçalı olarak verilen cebirsel ifadeyi grafik temsiline doğru olarak dönüştürmüşler ancak fonksiyon olmama durumunu düşey doğru testini kullanarak değil cebirsel analiz yolu ile algılamışlardır.

İki değişkenli fonksiyon kavramının tanımı açısından ise öğrencilerin verdiği tanımların beş gruba ayrıldığı görülmüştür. On üç öğrenciden oluşan ilk grup aşağıdaki iki tanımdan birini veren öğrencilerin grubudur:

"Tanım kümesi $\Re^2$ nin, değer kümesi $\Re$ nin alt kümesi olan fonksiyona iki değişkenli fonksiyon denir"

"$A, B \neq \phi$ olsun. Her (x,y)$\in$A ikilisini tek bir z$\in$C ye eşleyen bir bağıntıya iki değişkenli fonksiyon denir."

İkinci gruptaki bir öğrenci iki değişkenli fonksiyonu üç boyutlu uzayda geometrik açıklamaları ile tanımlamıştır.

Üçüncü grubu ise dört öğrenci oluşturmuştur. Bu gruptaki öğrenciler verdikleri tanım ile girdi-çıktı ve girdinin çıktıya sağa teklik koşulu ile dönüşümü bilgilerine sahip olduklarını göstermişlerdir ancak, tanımlarındaki sınıfı "*kural*" olarak seçmişlerdir. Bu öğrencilerin yansıttıkları fonksiyon süreci bilgisi nedeni ile, her ne kadar sınıfı "*kural*" olarak seçseler de manipülasyon kısıtlamasına sahip olmadıkları sonucuna ulaşılmıştır.

Dördüncü gruptaki iki öğrenci ise manipülasyon kısıtlamasına sahip olduklarını göstermişlerdir. İki öğrenciden birine ait tanım, örnek oluşturması için aşağıda verilmiştir.

"Her (x,y) için tek bir z değeri alan eşitliğe iki değişkenli fonksiyon denir."

Son grupta üç öğrenci iki değişkenli fonksiyonu *A,B* ve *C* boştan farklı üç küme olmak üzere $A\times B$ den *C* ye bir bağıntı olarak tanımlamışlardır.

İki değişkenli fonksiyonlar konusunda olan ilk testte öğrencilerin en çok güçlüğü, eliptik paraboloit yüzeyinin grafik temsilinin verilerek, bu yüzeyin temsil ettiği iki değişkenli fonksiyonun tanım ve değer kümelerinin istenildiği üçüncü soruda yaşadığı görülmüştür. Yalnızca iki öğrenci hem tanım hem de değer kümesini doğru verebilmiştir. Öğrencilerin tanım ve değer kümeleri için verdikleri yanıtlar karşılaştırıldığında, tanım kümesini bulma konusunda daha fazla güçlük yaşadıkları görülmüştür. On üç öğrenci değer kümesini doğru verirken, tanım kümesine ulaşabilen öğrenci sayısı yalnızca üç olarak elde edilmiştir. Bu soruda başarısız olan öğrencilerin fonksiyon süreci ile grafiği ilişkilendiremedikleri görülmüştür. İki öğrenci değer kümesinin elemanlarını *(x,y,z)* şeklinde üçlüler olarak vererek grafiğin bir *(x,y)* noktasındaki yüksekliğinin *f(x,y)=z* değeri olduğunu anlamadıklarını göstermişlerdir. Benzer şekilde, iki değişkenli bir fonksiyonun tanım kümesindeki elemanların her zaman ikililer olması gerektiği bilgisine sahip olamamış üç öğrenci de tanım kümesinin elemanlarını, iki öğrenci ise hem tanım hem de değer kümesinin elemanlarını *(x,y,z)* şeklinde üçlüler olarak vermişlerdir. Diğer öğrenciler ise tanım ve değer kümelerinin elemanlarını doğru vererek iki değişkenli bir fonksiyonun tanım ve değer kümelerinin elemanlarının her zaman sırası ile ikililer ve gerçel sayılar olması gerektiği bilgisini kazanmış olduklarını yansıtmışlardır. Bu öğrenciler tanım ve değer kümelerinin elemanlarını doğru vermişler ancak tanım kümesini belirten düzlemsel bölgeyi ya da değer kümesine eşit olan aralığı başarı ile belirleyememişlerdir. Tanım kümesini belirlemede güçlük yaşayan öğrencilerin çoğu tanım kümesini

$$\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}\le 1\right\} \text{ yerine } \left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1\right\}$$

şeklinde verdiklerinden, yüzeyi düzleme izdüşürme konusunda güçlük yaşadıkları yorumu yapılmıştır. Ayrıca öğrencilerin bu izdüşüm alma konusunda yaşadıkları güçlüğün son testte de devam ettiği, ancak önceki testteki gibi tanım ve değer kümesinin elemanları ile ilgili boyut problemlerini aştıkları görülmüştür. Örneğin üç öğrencinin son testte verilen yüzeyi düzlem yerine eksenlere ayrı ayrı izdüşürdüğü görülmüştür. Son testte tanım ya da değer kümesinin elemanlarını üçlü olarak veren öğrenci sayısı sırası ile bir ve iki olarak belirlenmiştir. Ayrıca tanım kümesi belirleme konusunda başarılı öğrenci sayısı son testte üçten 10'a çıkmıştır.

Görüşmelerin Bulguları

Çalışmanın güvenirliğini sağlamak amacı ile veri çeşitlemesinde kullanılan görüşmelerin bir diğer amacı, testlerin sonuçlarına göre bilişsel seviyesi en az süreç olarak belirlenmiş öğrencilerin seviyelerinin süreç mi yoksa nesne ya da şema mı olduğunu belirlemektir.

Burada görüşme yapılan öğrenciler birden altıya kadar numaralandırılarak isimlendirilecek ve bazı öğrencilerin görüşme analizlerinin sonuçları detaylı verilirken, bazı öğrenciler için elde edilen benzer sonuçlar kısaca açıklanacaktır.

Birinci Öğrencinin Sonuçları: Birinci öğrenci ile yapılan görüşmeden ve testlerden elde edilen bulguların tutarlı olduğu görülmüştür. Fonksiyon kavramının tanımı açısından, birinci testte bu öğrencinin girdi-çıktı ve girdinin çıktıya dönüşümü bilgilerine, "*sağa teklik koşulu*" hariç sahip olduğu ancak, tek değişkenli fonksiyonu "*kural*" olarak tanımladığı görülmüştür. Dubinsky ve Harel'in (1992) de kullandığı gibi "*sağa teklik koşulu*" ifadesi ile burada bir girdinin tek bir çıktısı olması koşulu kast edilmektedir. Birinci test ile Analiz II dersinin başında öğrencinin fonksiyon kavramına ilişkin bilişsel seviyesi, katılık ve manipülasyon kısıtlamalarına sahip oldukça zayıf süreç olarak tahmin edilmiştir. Birinci testte ne grafik ne de cebirsel temsillerde fonksiyon durumlarını algılayamamış öğrencilerden biri olan bu öğrenci, fonksiyon makinesi kullanılarak yapılan gözden geçirme sonrasında ise fonksiyon durumlarını grafik ve cebirsel temsillerde sırasıyla düşey doğru testi ve cebirsel analiz kullanarak algılama becerisini kazanmıştır. Ayrıca, tanımında sağa teklik koşulunu da vermeye başlamıştır. Diğer yandan, fonksiyonu hala "*kural*" olarak tanımladığı görülmüştür. Öğrencinin fonksiyonu kural olarak tanımlamasından manipülasyon kısıtlamasına sahip olduğu sonucuna gidilmemiştir çünkü, öğrencinin ikinci testte verdiği yanıtların tamamı göz önüne alındığında süreç seviyesinde olduğuna dair göstergelere sahip olduğu görülmüştür. Bu öğrenci ile yapılan görüşmeden elde edilen bulgular da yorumumuzu desteklemiştir. Görüşmede verdiği tanımda öğrenci yine fonksiyonu kural olarak ifade etmiştir ancak, öğrencinin görüşmede verdiği yanıtlar bilişsel seviyesinin en az süreç olduğunu kanıtlar niteliktedir. Görüşmede öğrenci, fonksiyonların eşitliğini kolayca ve hızlı biçimde algılamıştır. Ayrıca, görüşmede verilen gösterimler konusundaki ifadelerinde girdi-çıktı ve girdinin çıktıya dönüştürülmesi bilgisini açıkça göstermiştir. Girdileri fonksiyon olan bir örnek için ters fonksiyon ve bileşke işlemlerini kullanarak verdiği fonksiyon örnekleri, fonksiyon kavramına ilişkin bilişsel seviyesinin nesne olduğu sonucuna ulaşmamızı sağlayan bulgulardan biridir.

Görüşmeci: Girdileri fonksiyon olan bir fonksiyon makinesi biliyor musun?

Birinci öğrenci: Bu durumda,…, *f* bileşke g olabilir mi?

Görüşmeci: Makineye ne giriyor?

Birinci öğrenci: g giriyor

Görüşmeci: evet ….

Birinci öğrenci: Makine *f*, çıktı … hımm..şey *f* uygulandıktan sonra elde edilen şey

Görüşmeci: Ne elde edilir?

Birinci öğrenci: g(x) fonksiyonu girer ve *f* ile yeni bir fonksiyon oluşturulur.

İki değişkenli fonksiyonlar konusunda olan ilk testte birinci öğrenci, hem cebirsel hem de grafik temsillerinde fonksiyon durumlarını algılayabilmiştir ancak, grafik temsillerini de cebirsel temsile çevirerek inceleme yapmaktadır. Benzer olarak tanım ve değer kümesi bulma konusunda da güçlük yaşadığı görülmüştür. İki değişkenli fonksiyonun tanım kümesinin elemanı olarak *(x,y,z)* şeklinde sıralı üçlü vererek de iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesi ile ilgili doğru bilgiye sahip olmadığını kanıtlamıştır. Bunun yanında iki değişkenli fonksiyon tanımının, yine fonksiyonu kural olarak vermesinin dışında doğru olduğu görülmüştür. Dolayısıyla üçüncü testin sonunda öğrencinin iki değişkenli fonksiyonlara ilişkin bilişsel seviyesi katılık kısıtlaması ve belki manipülasyon kısıtlaması da içeren zayıf süreç olarak tahmin edilmiştir. Araştırma sürecinin yani dersin sonunda öğrencinin, bazı grafik temsillerinde fonksiyon durumlarını düşey doğru testi ile algılama becerisini ve iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesinin boyut bilgisini kazanmış olduğu görülmüştür. Diğer yandan, öğrenci üç boyutlu uzayda yüzeyin düzleme izdüşürülmesi konusunda güçlük yaşadığından dolayı son testte de grafiği verilen fonksiyonun tanım kümesini elde etme konusunda başarısız olduğu görülmüştür. Dolayısıyla, öğrencinin yukarıda bahsedilen kazanımları göz önüne alındığında testler sonunda iki değişkenli fonksiyonlara ilişkin bilişsel seviyesinin süreç olduğu tahmin edilmiştir.

İki değişkenli fonksiyon kavramı sorgulanmaya başlanıldığında, testlerin sonuçlarından birinci öğrencinin sahip olduğu şüphesine düşülen manipülasyon kısıtlaması görüşmede gözlenmemiştir. Görüşmede iki değişkenli fonksiyon kavramını başarıyla tanımlamakla kalmayıp, hem iki değişkenli fonksiyon grafiğini çizebilmiş hem de grafikten izdüşüm alarak fonksiyonun tanım ve değer kümesini doğru olarak elde edebilmiştir. Yani öğrenci, fonksiyon süreci ile üç boyutlu uzay bilgisini ilişkilendirme becerisini kazanmıştır. Son görüşme sorusunda ise bu öğrenci, tablo temsilleri verilen tek ve iki değişkenli fonksiyonların bileşkesini ve iki fonksiyonun bileşkesini alabilme koşulunu ifade etmiştir. Diğer bir deyişle bu öğrenci, verilen fonksiyonların bileşkesini cebirsel olarak hesaplamanın ötesinde iki fonksiyonun bileşkesi kavramına ilişkin bilişsel seviyesinin düşük olmadığını göstermiştir. Ayrıca bu öğrenci izdüşüm alarak tanım ve değer kümesini elde etme becerisini ve üç boyutlu uzay ile fonksiyon sürecini ilişkilendirme bilgisini kazandığını göstermiştir. Öğrencinin bu kazanımları sonunda iki değişkenli fonksiyonları anlama seviyesi en az süreç olarak belirlenmiştir.

İkinci Öğrencinin Sonuçları: İkinci öğrenci testlerde tek ve iki değişkenli fonksiyonları anlama seviyesi konusunda iyi bir performans sergilemiş olmasına karşın, görüşmede sahip olduğu pek çok güçlüğü ortaya koymuştur. İlk testte bu öğrencinin fonksiyon kavramına ilişkin bilişsel seviyesinin katılık, manipülasyon ve nicelik kısıtlamaları ile oldukça zayıf süreç olduğu sonucuna varılmıştır. Sonraki testte hem cebirsel hem de grafik temsillerindeki fonksiyon durumlarını cebirsel temsile dönüştürerek de olsa algılama becerisini kazanmış olduğu görülmüştür. Fonksiyon makinesi ile yapılan fonksiyon kavramının gözden geçirilmesinin ardından, bu öğrencinin fonksiyon kavramına ilişkin bilişsel seviyesinin katılık ve manipülasyon kısıtlamaları ile süreç olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

İki değişkenli fonksiyonlar konusundaki ilk testte öğrenci, yine cebirsel yaklaşımla da olsa tüm soru maddelerini doğru yanıtlayarak başarı sergilemiştir. Yani tek değişkenli fonksiyonlarda sahip olduğu katılık kısıtlamasının iki değişkenli fonksiyonlarda da devam ettiği görülmüştür ve iki değişkenli fonksiyonlar konusunda olan ilk testte bilişsel seviyesi katılık kısıtlaması ile süreç olarak belirlenmiştir. Son testte ise ikinci öğrencinin, bazı grafik temsillerinde fonksiyon durumlarını geometrik olarak algılayabildiği yani katılık kısıtlamasından kurtulmuş olduğu görülmüştür. Bu bilişsel gelişimi bütün sorulara verdiği yanıtlar ile birlikte göz önüne alındığında iki değişkenli fonksiyonları anlama seviyesinin katılık kısıtlaması ile süreçten oldukça güçlü süreç seviyesine yükseldiği sonucuna varılmıştır. Öğrencinin testlerde tek değişkenli fonksiyonlar konusunda sahip olduğu nicelik kısıtlamasının görüşmede de açıkça ortada olduğu ve bu kısıtlamanın öğrencinin fonksiyonları nesne olarak görmesini engellediği görülmüştür. Görüşmecinin öğrenciyi bu konuda sorgulaması sırasında, terslenebilir fonksiyonların tersini alma işlemini fonksiyon olarak görebilmesi konusunda görüşme aşağıdaki biçimde sürmüştür:

Görüşmeci: Tamam, ters alma işlemi makinesini çizelim mi?

İkinci öğrenci: ... (makineyi çiziyor)

Görüşmeci: Makineden ne girer?

İkinci öğrenci: Fonksiyon girer, *f* girer, *f(x)* gibi bir şey girer

Görüşmeci: Hangisi girer, *f* mi yoksa *f(x)* mi?

İkinci öğrenci: ... bir dakika, f^{1} i düşünüyorum, tamam (sesli düşünüyor) ... *f(x)* girer çünkü ..., örneğin içine *f(x)* koyduğumda, *f(x)*, $\frac{x-4}{2}$ gibi bir şey, sonra bunun tersini alırım, *f(x)* girer ve $f^{1}(x)$ çıkar.

İkinci öğrencinin yukarıda görülen ifadelerinden ayrıca manipülasyon kısıtlamasına da sahip olduğu düşünülmektedir. Bir süre sonra bu ifadelerindeki bilişsel durumunu aşağıdaki biçimde daha açık ortaya koymuştur:

Görüşmeci: f gösteriminin fonksiyon olduğunu söyledin. Peki *f(x)* nedir?

İkinci öğrenci: *f(x)* bir sayıdır

Görüşmeci: Peki ters alma makinesine hangisi girer?

İkinci öğrenci: *f(x)* girer, *f(x)* bir sayıdır, bir sayıyı alırız, bu makinede bazı işlemlere tabi tutarız ve fonksiyonun kuralına göre bir sayı alırız.

Yukarıdaki bulguların dışında ikinci öğrencinin, tablo ile verilen fonksiyonların bileşkesini alabildiği ancak, bu hesaplamayı yaparken bileşke fonksiyonun bilincinde olmadığı görülmüştür. Dolayısıyla bu öğrencinin fonksiyon kavramına ilişkin bilişsel seviyesinin nesne olamayacağı, zayıf süreç olduğu sonucuna varılmıştır. Görüşmede öğrenci, iki değişkenli fonksiyonlara ilişkin sorgulanmaya başladığında, iki değişkenli fonksiyon tanımında da manipülasyon kısıtlamasına sahip olduğu görülmüştür.

İkinci öğrenci: Fonksiyon $\Re^2$ den $\Re$ ye giden bir bağıntı, bir kuraldır

Görüşmeci: Bağıntı ile kural aynı mıdır?

İkinci öğrenci: Hayır kuraldır

Görüşmeci: Neden bağıntıdan vazgeçtin?

İkinci öğrenci: ... (gülüyor) aslında bağıntı denilebilir çünkü bağıntı ... nasıl söylesem ... fonksiyon bir kuraldır ... örneğin *f(x)* diyelim ... hayır *f(x)* diyemeyiz, *f(z)* diyelim çünkü iki değişkenli, örneğin $f(z)=x^2-2xy$ bir kuraldır.

Geometrik bilgi açısından ikinci öğrencinin bazı özel yüzeyleri çizme becerisine sahip olduğu görülmüştür:

İkinci öğrenci: … evet çizebilirim … ($z=x^2+y^2$ ile verilen yüzeyin grafiğini çiziyor) … z, x^2+y^2 ye bağlı, örneğin z=k olsun. Dolayısıyla $x^2+y^2=k$, aslında merkezi (0,0) ve yarıçapı $\sqrt{k}$ olan çemberdir, örneğin burada k olsun, z=l olarak alalım, yani $x^2+y^2=l$. Bu, merkezi (0,0) ve yarıçapı l olan çemberdir. k , l den büyük olsun. Artırarak gidiyorum, böyle bir çember elde ederiz, ... kolları yukarı doğru giden parabol elde ederim.

Bu öğrenci grafiği doğru çizebilmiş ancak, üç boyutlu uzay bilgisinin sezgisel olduğunu göstermiştir:

Görüşmeci: Ne elde ettin?

İkinci öğrenci: Parabol … (gülüyor)

Görüşmeci: tamam peki bu nedir? (görüşmeci $y=x^2$ nin grafiğini çiziyor)

İkinci öğrenci: evet, o da parabol

Görüşmeci: Peki, aralarında herhangi bir fark var mı?

İkinci öğrenci: Tabi ki, nasıl söylesem, bu üç boyutlu uzayda bir bardak gibi ancak bu sadece kollarım gibi (kollarını kaldırıyor)

Yani bu öğrencinin üç boyutlu uzayda grafik çizme becerisine sahip olduğu ancak, üç boyutlu geometri bilgisinin sezgisel olduğu sonucuna varılmıştır. Durum böyleyken bu öğrencinin yüzeyin izdüşümünü alarak tanım kümesi bulamadığı görülmüş ve iki değişkenli fonksiyonları anlama seviyesinin zayıf süreç olduğu elde edilmiştir.

Üçüncü Öğrencinin Sonuçları: Üçüncü öğrencinin fonksiyon kavramındaki bilişsel gelişiminin önceki iki öğrenciden farklı olduğu görülmüştür. Bu öğrenci cebirsel yaklaşımını ne testlerde, ne de görüşmede terk edememiştir. Yani öğrenci bütün testler ve görüşmede katılık kısıtlamasına sahip olduğunu göstermiştir. Testlerde sırası ile bilişsel seviyeleri katılık kısıtlaması ile oldukça zayıf süreç, katılık ve manipülasyon kısıtlamaları ile zayıf süreç, katılık ve manipülasyon kısıtlamaları ile süreç ve son olarak katılık kısıtlaması ile süreç olarak elde edilmiştir. Yani kısıtlamalarından kurtulamasa bile süreç seviyesi içerisinde sürekli bir bilişsel gelişim göstermiştir. Bu öğrencinin görüşmede manipülasyon kısıtlamasına sahip olması bir yana, görüşmede verdiği bütün yanıtları göz önünde bulundurulduğunda fonksiyon kavramını anlama seviyesinin nesne olduğu sonucuna varılmıştır. Örneğin, girdileri fonksiyonlar olan pek çok fonksiyon örneği vermiştir:

Görüşmeci: Girdileri fonksiyon olan bir fonksiyon biliyor musun?

Üçüncü öğrenci: Girdileri fonksiyon … (sesli düşünüyor)

Görüşmeci: Evet, böyle bir fonksiyon hatırlıyor musun?

Üçüncü öğrenci: Fonksiyonların bileşkesi olabilir, …, sonra bir fonksiyonun tersini alma, … hımmm… örneğin türev ya da integral almak, bunlarda birer fonksiyon, değil mi? Buralarda de fonksiyonlarla işlemler var ve bu işlemlerin sonunda bir yerlere gideriz

Görüşmeci: Bu işlemlerin sonunda ne elde edersin?

Üçüncü öğrenci: Yine bir fonksiyon elde ederiz

Testlerde olduğu gibi görüşmede de cebirsel yaklaşıma yani katılık kısıtlamasına sahip olan bu öğrencinin iki değişkenli bir fonksiyonun cebirsel temsilinden tanım kümesi belirleyebildiği ancak, grafikten tanım kümesine ulaşma konusunda başarısız olduğu görülmüştür. Diğer yandan yüzey grafiklerini doğru olarak çizebilmesine karşın bu öğrencinin üç boyutlu uzay bilgisi ile fonksiyon sürecini ilişkilendiremediği ve bunun iki değişkenli fonksiyonlara ilişkin bilişsel gelişimini engellediği görülmüştür. Görüşmeden elde edilen verilerin analizinin ardından, öğrencinin fonksiyon ve iki değişkenli fonksiyon kavramlarını anlama seviyelerinin sırası ile nesne ve süreç olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Dördüncü Öğrencinin Sonuçları: Dördüncü öğrencinin bilişsel becerileri genel olarak üçüncü öğrenci ile benzerdir. İki öğrencinin bilişsel gelişimleri arasındaki fark, dördüncü öğrencinin fonksiyon kavramına ilişkin sahip olduğu cebirsel yaklaşımını yani katılık kısıtlamasını, fonksiyon kavramının yeniden gözden geçirilmesi ile terk etmesi ancak, iki değişkenli fonksiyon kavramında tekrar kazanmasıdır. Yani bu öğrenci yeniden gözden geçirme ile fonksiyon ve geometri bilgilerini ilişkilendirme becerisini üçüncü öğrenciden daha fazla geliştirmiştir. Üçüncü öğrencinin bütün araştırma süreci boyunca cebirsel yaklaşıma sahip olmasına karşın, görüşmeler sonunda üçüncü ve dördüncü öğrencilerin fonksiyon kavramını anlama seviyeleri nesne olarak belirlenmiştir. Dördüncü öğrenci üç boyutlu uzay ve iki değişkenli fonksiyon bilgilerini ilişkilendirme açısından az da olsa bilişsel gelişime sahip olduğunu göstermiştir. Örneğin görüşmelerde üçüncü öğrencinin aksine bu öğrenci, yüzey çizimleri sırasında fonksiyon kavramı ile üç boyutlu uzay bilgilerini ilişkilendirdiğini yansıtmıştır. Ayrıca üçüncü öğrenci iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesini cebirsel temsilinden bulmak isterken, dördüncü öğrenci tam olarak elde edemese de tanım kümesini yüzey grafiğinin izdüşümünü alarak bulmaya çalışmış ancak, eksenlere ayrı ayrı izdüşüm almıştır. Diğer yandan, dördüncü öğrencinin genellemesi bağımsız değişken tabanlı değildir. Bu öğrenci fonksiyon kavramını aşağıdaki biçimde genellemiştir:

“İki değişkenli fonksiyonlar, fonksiyon kavramının tanımına göre, …, bu kez tanım kümesi A×B lerden oluşacak, tanım kümesi ikililer içerecek, değer kümesi ise bir küme, değer kümesi her zaman bir küme olmalı, çünkü iki değişkenli fonksiyon, iki bağımsız ve bir bağımlı değişkeni var”

Buna karşın, bu öğrencinin verdiği bu tanımı ile uygulamalarının tutarlı olmadığı görülmüştür. Öğrenci, iki değişkenli fonksiyonlar konusundaki uygulamalarında iyi bir bilişsel performans sergilemiştir. İki değişkenli fonksiyon kavramını anlama seviyesi güçlü süreç olarak belirlenmiştir.

Beşinci Öğrencinin Sonuçları: Beşinci öğrenci hem görüşmede hem de testlerde en iyi performansı sergilemiş öğrencidir. Bu öğrenci grafik ve cebirsel temsillerde fonksiyon durumlarının belirlenmesinin istenildiği birinci ve ikinci sorulara doğru yanıt vermiştir. Çoğu diğer öğrenci gibi bu öğrencinin de öğretim sürecinin başında tek değişkenli fonksiyonun bağımsız değişkeni bilgisi ile ilgili güçlük yaşadığı ancak, herhangi bir kısıtlamaya sahip olmadığı görülmüştür. İlk testte bilişsel seviyesi zayıf süreç iken, tek değişkenli fonksiyonlar konusunda ikinci testte tek değişkenli fonksiyonun bağımlı ve bağımsız değişkenleri bilgisini kazanarak grafik ve cebirsel temsillerdeki fonksiyon durumlarını algılayabilir hale geldiği görülmüştür. Ayrıca pek çok öğrencinin sahip olduğu katılık kısıtlamasına ikinci testte de sahip olmadığı görülmüştür. Bu öğrenci, grafik temsillerindeki fonksiyon durumlarını cebirsel temsile geçiş yapmaksızın düşey doğru testini kullanarak algılamıştır. Dolayısıyla öğrencinin ikinci testteki bilişsel seviyesi *oldukça güçlü süreç* olarak belirlenmiştir. Benzer şekilde bu öğrenci iki değişkenli fonksiyon durumlarını da bu konuda uygulanan ilk testte algılamış ancak, çoğu öğrenci gibi bu testte cebirsel yaklaşım yani katılık kısıtlamasını göstermiştir. İki değişkenli fonksiyonlar konusunda olan bu ilk testin ardından, iki değişkenli kavramların öğretimi sürecindeki bilişsel gelişimi ile cebirsel yaklaşımını yani katılık kısıtlamasını yine terk ederek iki değişkenli fonksiyonları anlama seviyesinin de süreç olduğunu göstermiştir. Son iki testte bu öğrencinin karşılaştığı tek güçlük yüzey grafiğinin izdüşümünü alarak tanım kümesini bulma konusunda olmuştur. Öğrenci yüzeyi eksenlere ayrı ayrı izdüşümürmüş ancak, tanım kümesinin elemanlarının her zaman ikililer olması gerektiği bilincinde olduğunu göstermiştir. Bu öğrenci ile yapılan görüşmenin analizine göre ise, tek ve iki değişkenli fonksiyonları anlama seviyelerinin sırası ile *en az süreç (nesne olabilir*) ve *en az nesne (şema olabilir*) olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Öğrenci fonksiyon kavramına ilişkin bilişsel seviyesini görüşmenin tüm görevlerine verdiği yanıtlarda yansıtmıştır.

Görüşmeci: Girdileri fonksiyon olan bir fonksiyon biliyor musun?

Beşinci öğrenci: fonksiyondan fonksiyon üretmek için bileşke işlemi aklıma geliyor. Örneğin, girdi $g(x)=x-2$ fonksiyonu olsun. $x-2$ nin karesini alıp dört katını sonuçtan çıkaralım

Görüşmeci: Peki, bu durumda fonksiyon makinesi nedir?

Beşinci öğrenci: Fonksiyon makinesi, karesini alıp dört katını çıkartmak. Makineye g koyduğumda f ve g nin bileşkesi çıkar

Görüşmeci: Peki fonksiyonun tersini alma konusunda ne dersin?

Beşinci öğrenci: Fonksiyonun tersini alma her zaman çalışmaz çünkü x_1 ve x_2 gibi iki elemanın görüntüsü eşit olabilir, diyelim y olsun, bu fonksiyon olma koşulunu sağlar ancak, tersini almak istediğimizde $f^{-1}(y)$; x_1 ve x_2 olabilir. Bir eleman iki görüntüye sahip olduğunda ise bu fonksiyon olamaz

Görüşmeci: Hangi fonksiyonların tersi vardır?

Beşinci öğrenci: Bire-bir ve örten fonksiyonların

Görüşmeci: Dolayısıyla ne zaman ters alma makinesi çalışır?

Beşinci öğrenci: Tanım kümesinde olan f fonksiyonları bire-bir ve örten olduğunda.

Görüşmeci son soruda tablo temsillerini verdiğinde beşinci öğrencinin ifadeleri aşağıdaki gibi olmuştur:

Görüşmeci: Bu tablolara göre $g(f(x,y))$ cebirsel ifadesi mümkün müdür?

Beşinci öğrenci: Evet

Görüşmeci: Neden?

Beşinci öğrenci: Çünkü $f(x,y)$ değerleri g nin bağımsız değişkenlerini alır. Yani, $f(x,y)$ nin bağımlı değişkenleri, g nin bağımsız değişkenleridir.

Görüşmeci: Son ifadeni biraz daha açıklar mısın

Beşinci öğrenci: Bunun tanım kümesi (*g*'yi gösteriyor), bunun (*f*'i gösteriyor) değer kümesine eşittir

Altıncı Öğrencinin Sonuçları: Altıncı öğrenci hem testlerde hem de görüşmede bilişsel performansı en düşük öğrencidir. Dersin başında uygulanan ilk testte fonksiyon kavramını anlama seviyesi eylem olarak belirlenmiştir. Çoğu öğrencinin yaptığı gibi grafik temsillerindeki fonksiyon durumlarını araştırmak için cebirsel formülleri belirlemeye çalışmış ancak, daha sonra sabit fonksiyonun dışında tüm maddeleri fonksiyon olarak seçmiştir. Fonksiyon durumlarını algılayabildiği tek temsil tablo temsilleri olmuştur. Ayrıca bu öğrenci fonksiyon tanımı yerine verdiği karmaşık ifadesinde girdi-çıktı ve girdinin çıktıya dönüştürülmesi bilgilerine sahip olmadığını göstermiştir. Fonksiyon kavramının fonksiyon makinesi ile tekrar gözden geçirilmesinin ardından girdi-çıktı ve girdinin çıktıya sağa teklik koşulu ile dönüşmesi bilgilerini kazandığını verdiği tanım gösterir hale gelmiştir. Ayrıca ikinci testte hem cebirsel hem de grafik temsillerinde fonksiyon durumlarını algılayabilmiştir. Dolayısıyla bu öğrencinin ikinci testteki fonksiyonları anlama seviyesi katılık kısıtlaması ile süreç olarak yorumlanmıştır. Öğrenci, iki değişkenli fonksiyonlar konusunda olan ilk testte yalnızca cebirsel temsillerdeki fonksiyon durumlarını algılayabilmiştir. Ayrıca bu öğrenci yüzeyi düzleme izdüşürememenin ötesinde, grafiği verilen iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesinin elemanını sıralı üçlülerle verdiğinden, iki değişkenli bir fonksiyonun tanım kümesindeki elemanların her zaman sıralı ikililer olması gerektiği bilgisine sahip olmadığı sonucuna varılmıştır. Öğrenci iki değişkenli fonksiyonu tanımlayabilmiş ancak, manipülasyon kısıtlamasına sahip olduğunu göstermiştir. Dolayısıyla, öğrencinin iki değişkenli fonksiyonları anlama seviyesinin manipülasyon kısıtlamasına sahip zayıf süreç olduğu düşünülmüştür. Öğrenci iki değişkenli fonksiyonlar konusunda olan son testte çok az bilişsel ilerleme göstermiş ve bilişsel seviyesi yine zayıf süreç olarak görülmüştür. Önceki testte sahip olduğu iki değişkenli bir fonksiyonun tanım kümesindeki elemanla ilgili boyut karmaşasını terk etmiş ancak, bu kez de yüzeyi düzlem yerine eksenlere ayrı ayrı izdüşürmüştür. Yani, grafiği verilen iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesine yine ulaşamamıştır. Görüşmenin başında verdiği tanımda ise girdi-çıktı ve sağa teklik koşulunu yansıtmıştır ancak manipülasyon kısıtlamasına ya da girdinin çıktıya dönüştüğü bilgisine sahip olup olmadığı konusunda emin olunamamıştır:

" $A, B \neq \phi$ olsun. $\forall x \in A$ için yalnız bir $y \in B$ vardır öyle ki $f(x) = y$ "

Görüşmeci ve öğrenci, fonksiyonlar konusunda verilen gösterimleri konuşurken:

Görüşmeci: Sana göre *f(x)* ne anlama gelir?

Altıncı öğrenci: fonksiyon, makineye giren sayı ... *f(x)* gibi bir fonksiyon

Görüşmeci: Yani bu bir fonksiyon mudur?

Altıncı Öğrenci: Girdi ... onun girdisi

Görüşmeci: Hangisi girdi?

Altıncı Öğrenci: f(x) ... makineye giren ifade ... evet

Görüşmeci: Makineye giren ifade mi?

Altıncı Öğrenci: Fonksiyon diyebiliriz

Görüşmeci: Makineye giren ifade ile fonksiyon aynı mıdır?

Altıncı Öğrenci: x gibi bir sayı makineye girer, bunun *f(x)* gibi bir işleme tabi tutulmasıyla *f(x)* olur, *f(x)* fonksiyondur... bunlar aynı değil

Görüldüğü gibi öğrenciye ait verilen alıntılar nicelik ve manipülasyon kısıtlamalarını işaret etmektedir. Ayrıca öğrenci girdi-çıktı bilgisi konusunda da emin değildir. Doğal olarak bu öğrenci fonksiyonu nesne olarak görmeyi başaramamıştır. İki değişkenli fonksiyonlara ilişkin oldukça zayıf bilişsel performans sergileyen bu öğrencinin fonksiyonları anlama seviyesi eylem olarak belirlenmiştir. Öğrencinin iki değişkenli fonksiyon tanımı aşağıdaki gibidir:

"*x* ve *y* tanım kümemizde olsun. Bu *x* ve *y*'yi B'nin *z* gibi yalnızca bir elemanına eşleyen ifadeye iki değişkenli fonksiyon denir. Yani $\Re$'den $\Re$'ye olan tek değişkenli ifadeyi $\Re^2$'den $\Re$'ye olan iki değişkenli ifadeye taşıyoruz. Kısaca

$$f : \begin{cases} D_f \subset \Re^2 & \rightarrow \quad \Re \\ (x, y) & \rightarrow \quad z \end{cases}$$

şeklinde yazarsak, burada $\Re^2$'den *giden f(x,y)* ve $\Re$ deki çıktımız."

Öğrenciden $z = x^2 + y^2$ cebirsel ifadesini grafik ile temsil etmesi istenildiğinde yüzeyi başarılı biçimde çizmiştir ancak, ezbere çizim yaptığından dolayı çizdiği parabolün *z* ekseni yerine *y* eksenini sardığı görülmüştür. Yani öğrenci zayıf bilişsel seviyesine ilişkin göstergelere devam etmiş ve iki değişkenli fonksiyonları anlama seviyesinin eylem olduğunu aşikar hale getirmiştir.

Tartışma ve Sonuç

İki değişkenli fonksiyonlar çoğu yüksek matematik konusu için temel oluşturan önemli bir kavramdır. Bu kavramın öğrenilmesi; gerek fen fakültelerinde olduğu gibi teorik anlamda, gerekse mühendislik fakültelerinde olduğu gibi uygulamalı anlamda, tek değişkenli fonksiyonların pek çok anahtar özelliğinin iki bağımsız değişkene genellenmesini gerektirir.

Öğrencilerin genel fonksiyon kavramını anlama seviyeleri ile, iki değişkenli fonksiyon kavramını oluşturmaları arasındaki ilişki bu araştırmadan elde edilen bulgular ile aşikar hale gelmiştir. Öğrencilerin fonksiyon kavramını anlama seviyelerinin, iki değişkenli fonksiyonları anlamalarında önemli bir rol oynadığı sonucuna ulaşılmıştır. Özellikle fonksiyon kavramını anlamada nesne seviyesine sahip olmanın, iki değişkenli fonksiyonları en az süreç seviyesinde anlamak için önkoşul olduğu görülmüştür. Martinez-Planell ve Trigueros-Gaismann'ın (2009) çalışmasında ulaştığı sonuca paralel olarak bu çalışmada da öğrencilerin çoğu iki değişkenli fonksiyonların grafik temsilleri ile güçlük yaşamışlardır. Bu çalışmada ayrıca, fonksiyon kavramını anlamada nesne seviyesine sahip bir öğrencinin, iki değişkenli fonksiyon süreci ile grafiğini ilişkilendiremese bile iki değişkenli fonksiyonları süreç seviyesinde oluşturabileceği görülmüştür. Böyle bir öğrenci iki değişkenli fonksiyonların grafik temsillerini algılamaya başladığında iki değişkenli fonksiyon sürecini matematiksel nesne olarak göz önünde bulundurabilmeye başlar. Eğer öğrencinin fonksiyon kavramı anlama seviyesi en fazla süreç ise, bu öğrencinin iki değişkenli fonksiyonları anlamsı zayıf olabilir. Özellikle kısıtlamaların öğrencilerin iki değişkenli fonksiyonları anlamalarını engellediği görülmüştür. Örneğin nicelik ya da manipülasyon kısıtlaması öğrencinin sadece fonksiyonlara nesne olarak bakabilmesini değil, fonksiyon sürecini tek değişkenden iki değişkene genellemesini de engeller. Ayrıca, fonksiyon kavramını algılamada kısıtlamalara sahip öğrencilerin bu kısıtlamalarını iki değişkenli fonksiyonlara taşıdıkları görülmüştür. Çalışmada öğrencilerin çoğunun iki değişkenli fonksiyonları anlama sürecinin başında cebirsel yaklaşıma sahip oldukları görülmüştür. Yani, bu öğrenciler grafik temsillerindeki iki değişkenli fonksiyon durumlarını algılayabilmek için cebirsel temsili belirleyerek cebirsel analiz yapmışlardır. Bazı öğrenciler cebirsel analizlerinde girdi-çıktı ve fonksiyon süreci bilgilerini iki değişkenli fonksiyonlara taşıyabildiklerini yansıtırken, bazıları ise cebirsel analizi ezbere yaptıklarını göstermişlerdir. Örneğin, fonksiyon kavramını anlama seviyesi nesne olan öğrenciler cebirsel yaklaşımı hemen terk ederek iki değişkenli fonksiyon süreci ile yüzey grafiğini ilişkilendirmeye başlamışlardır. Böyle bir öğrenci, yüzey grafiklerinin fonksiyon durumu olup olmadığını düşey doğru testini kullanarak algılayabilmektedir. Ayrıca fonksiyon kavramını anlaması nesne seviyesinde olan bir öğrenci, üç boyutlu geometride yaşadığı güçlüklerden dolayı cebirsel yaklaşımını terk edememiş olsa bile iki değişkenli fonksiyonları anlamada süreç seviyesine ulaşabilmektedir. Bunun yanında, fonksiyon kavramına ilişkin herhangi bir kısıtlaması olmayan ancak tek değişkenli fonksiyon süreci ile fonksiyon grafiklerini ilişkilendirememiş bir öğrencinin fonksiyonları anlama süreci nesne olmasa bile, kolayca cebirsel yaklaşımı terk edebildiği görülmüştür. Sonuç olarak bir öğrencinin iki değişkenli fonksiyonları oluşturması ile fonksiyon kavramını anlama seviyesi arasında direk bir ilişki vardır. Özellikle, fonksiyon kavramını nesne seviyesinde anlamış olmanın ve kısıtlamaların, öğrencilerin iki değişkenli fonksiyonları anlamaları üzerinde sırası ile pozitif ve negatif etkileri olduğu görülmüştür.

İki değişkenli fonksiyonların grafik temsilleri konusunda ise, öğrencilerin iki değişkenli fonksiyonları anlamada en problemli noktanın grafik temsilleri olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Trigueros ve Martinez-Planell (2009) öğrencilerin iki değişkenli fonksiyon grafiklerini anlamalarının kolay olmadığını ve bunun onların sahip olduğu üç boyutlu uzay şeması ile ilişkili olduğuna işaret etmişlerdir. Bu çalışmada da öğrencilerin genellikle bazı özel yüzey grafiklerini çizebildikleri ancak bazılarının ise bu çizme işlemini ezbere yaptıkları görülmüştür. Ezbere çizim yapan bu öğrencilerin bazılarının çizimleri sırasında "*yukarı kaldırılıyor*" gibi ifadelere sahip oldukları görülmüştür. Trigueros ve Martinez-Planell (2009) de bu tarz ifadeler konusunda, "*yüzeyi kesmek*" ya da "*eğriyi kaldırmak*" gibi ifadelerin, öğrencilerin gözünde canlandırmalarına yardımcı olduğunu ancak bu tarz ifadelerin anlamlarının sınıfta kesin hatlarıyla tartışılması gerektiğinin altını çizmişlerdir. Bu çalışmada da bu gibi ifadelerin anlamını kavrayamamış öğrencilerin, bu ifadeleri ezbere çizim yolu olarak kullandıkları görülmüştür. Bu öğrenciler iki değişkenli fonksiyon grafiklerini ezbere çizebiliyor olsalar bile, fonksiyon durumlarını araştırma konusunda genellikle cebirsel yaklaşıma sahiptirler. Yani, bu öğrenciler üç boyutlu uzay ile fonksiyon sürecini ilişkilendiremezler. Bu ilişkilendirme becerisi yokluğu nedeni ile bu öğrenciler, grafiği verilen iki değişkenli bir fonksiyonun tanım ve değer kümesini, yüzeyin izdüşümünü alarak elde edemezler. Ayrıca, bu öğrencilerin bazıları iki değişkenli bir fonksiyonun tanım ve değer kümesi elemanlarının sırası ile ikililer ve gerçel sayılar olması gerektiği bilincinde olmayabilirler. Diğer yandan, iki değişkenli fonksiyon sürecini üç boyutlu uzay bilgisi ile ilişkilendirebilmiş bir öğrenci bu becerisini, iki değişkenli fonksiyon grafiklerini çizim yolu ve grafik temsillerindeki fonksiyon durumlarını düşey doğru testi kullanarak algılaması ile yansıtır. Öte yandan bu çalışmada, böyle bir öğrencinin üç boyutlu uzay ile ilgili bazı güçlüklere sahip olsa bile grafik temsillerindeki fonksiyon durumlarını düşey doğru testi ile algılayabileceği ancak, fonksiyonun tanım kümesini bulmak için yüzeyi düzleme izdüşüremeyebileceği sonucuna varılmıştır. Sonuç olarak öğrencinin üç boyutlu uzay bilgisinin de, fonksiyon kavramını anlama seviyesi kadar öncelikli olmasa bile, iki değişkenli fonksiyon kavramını oluşturmasında temel oluşturduğu elde edilmiştir.

Öğrencilerin tek ve iki değişkenli fonksiyon tanımları göz önüne alındığında ise, genel fonksiyon bilgilerinin yanı sıra fonksiyon kavramına ilişkin sahip oldukları kısıtlamaları da iki değişkenli fonksiyonlara taşıdıkları görülmüştür. Yani, fonksiyon kavramına ilişkin girdi-çıktı ve girdinin çıktıya dönüştürülme bilgisini içeren tanıma sahip öğrencinin, bu bilgileri içeren bir iki değişkenli fonksiyon tanımına sahip olacağı kesinlik kazanmaz. Öğrencilerin fonksiyon tanımını tek değişkenden iki değişkene genellemeleri göz önüne alındığında, bazı öğrenciler tek değişkenli fonksiyon kavramını iki değişkene genellerken, bazılarının ise genel fonksiyon kavramı tanımını boştan farklı herhangi iki kümenin kartezyen çarpımından, boştan farklı bir kümeye olan bir bağıntıya genelledikleri görülmüştür. Diğer yandan, böyle yanlış bir genellemeye sahip bir öğrencinin iki değişkenli fonksiyonlara ilişkin güçlü bir anlama sergileyebileceği de elde edilmiştir.

Çalışmada benimsenen öğretim yaklaşımları açısından ise, genel fonksiyon kavramının öğretiminde çoklu temsillerin ve temsiller arası geçişin genel fonksiyon kavramının öğretimindeki etkinliği, alan yazında pek çok çalışma ile (Breidenbach ve ark., 1992; Ferrini-Mundy ve Graham, 1990; Janvier, 1987; Sierpinska, 1992) ortaya konulduğundan, bu çalışmada etkilerinin ele alınmasına gerek duyulmamıştır. Bu konuda alan yazında tartışılan nokta temsiller arası geçişlerin nasıl desteklenmesi gerektiği olmuştur. Bu çalışmadaki öğretim sürecinde bu gereklilik, yalnızca temsiller arası geçişte değil, ele alınan temsilde tek değişkenli fonksiyonların iki değişkenli fonksiyonlara genellenmesi konusunda da ihmal edilmemiştir. Bu nokta Martinez-Planell ve Trigueros-Gaismann (2009) tarafından da, çoklu temsiller ve bu temsiller arası geçişin sadece tek değişkenli fonksiyonların değil aynı zamanda iki değişkenli fonksiyonların öğretiminde de öneri şeklinde vurgulanmaktadır. Bu çalışmada aynı zamanda öğretim elemanı olan araştırmacı, Martinez-Planell ve Trigueros-Gaismann'ın işaret ettiği iki değişkenli fonksiyon kavramını veren bir öğretim elemanının öğrencilerin genel fonksiyon kavramını derinlemesine öğrendiklerinden emin olması gerekliliğinin bir öğretim dönemi önce yürütmüş olduğu bu çalışmada bilincinde olarak dersin başında genel fonksiyon kavramını dört ders saatini alacak şekilde özetlemiştir. Bahsedilen alan yazın desteğinin yanı sıra, öğrencilerin verdikleri yanıtlar da çalışmada benimsenen öğretim yaklaşımının yaklaşımının yerinde olduğunu göstermiştir. Genel olarak öğrenciler; yalnızca tek değişkenli fonksiyonlarda değil, iki değişkenli fonksiyonlarda da farklı temsilleri birbirine dönüştürme anlamında güçlük yaşamamışlardır. Çalışmada ayrıca Tall ve arkadaşları (2000) tarafından temsiller ve temsiller arası geçişi desteklediği öne sürülen "fonksiyon makinesi" kullanılmış ve araştırmanın sonunda fonksiyon makinesinin, fonksiyon kavramının öğrenilmesi konusunda bilişsel bir kök olarak olumlu etkiye sahip olduğu görülmüştür. Fonksiyon kavramının fonksiyon makinesi kullanılarak tekrar gözden geçirilmesinin ardından öğrencilerin çoğunun dersin başında sahip olmadıkları fonksiyonun bağımsız değişkeni bilgisini kazandıkları görülmüştür. Öğretim süreci başlamadan önce uygulanan ilk testte "*aşağıda verilenlerin hangileri bağımsız değişkeni x olan bir fonksiyondur?*" sorusu yerine "*aşağıdakilerin hangileri fonksiyondur?*" sorusu yönlendirilmiş olsaydı, fonksiyon durumlarını algılama konusunda öğrenci başarısının yükselmesi olasılığının yüksek olduğu görülmüştür. Öğrenciler ilk testte bahsedilen soru ile değişken karmaşasına düşerlerken, fonksiyon makinesi ile yapılan tekrar gözden geçirmenin ardından böyle bir soru ile ne istenildiğinin bilincine varmışlardır. Öğrencilerin, fonksiyon makinesinin, fonksiyonun bağımsız değişkeni olan makine girdilerini, fonksiyonun bağımlı değişkeni olan makine çıktılarına dönüştürdüğünü yani fonksiyon sürecini algıladıkları görülmüştür. Öğretim sürecinde fonksiyon makinesi sadece dersin başındaki gözden geçirmede değil, bilişsel kök olarak iki değişkenli fonksiyonların öğretiminde ve sonrasında fonksiyon kavramının algılanmasını güçlendirmek amacı ile iki değişkenli kavramların öğretimi boyunca kullanılmıştır. İki değişkenli fonksiyonların yönlü ya da kısmi türevleri, katlı integralleri gibi iki değişkenli kavramların öğretimi sürecinde öğrencilerin türev ya da integral gibi kavramlara, girdi ve çıktıları fonksiyon olan birer fonksiyon makinesi olarak bakabilmeleri sağlanmaya çalışılmıştır.. Araştırmanın sonunda elde edilen bulgulara göre, öğrencilere fonksiyonlar kümesinde yaptıkları işlemleri bir fonksiyon makinesi olarak göstermek, onların fonksiyonlara nesne olarak bakmalarını sağlamada yardımcı olmaktadır. Ayrıca bu şekildeki fonksiyon makinesi örnekleri, öğrencilerin sahip oldukları nicelik ya da manipülasyon gibi kısıtlamaları da ortadan kaldırmada önemlidir. Öğrencilerin yapılan görüşmelerdeki ifadeleri de fonksiyon makinesinin fonksiyon kavramını anlamaları üzerine olumlu etkisinin farkında olduklarını ortaya koymaktadır. Örneğin üçüncü öğrencinin fonksiyon makinesi ile ilgili görüşleri aşağıdaki gibi olmuştur:

Görüşmeci: Peki, fonksiyon makinesinin senin fonksiyon kavramını anlaman üzerinde herhangi bir etkisi oldu mu?

Üçüncü öğrenci: Evet, çok yararlı oldu

Görüşmeci: Nedir yararı, açıklar mısın?

Üçüncü öğrenci: Fonksiyon kavramı artık bana hiç öğretilmese de, artık ben ne anlama geldiğini biliyorum. Makine bana her girdi için yalnızca bir çıktı olması gerektiğini gösterdi. Aslında ben bu makineyi diğer matematiksel kavramlara da uygulayabilirim. Eminim arkadaşlarım da fonksiyon nedir diye sorulduğunda artık güçlük yaşamayacaklardır … çünkü biz genellikle daha önce ezbere cevap veriyorduk ama fonksiyon makinesi gerçekten yararlı.

Tüm bunların yanı sıra fonksiyon makinesi, fonksiyon kavramının öğretimi sürecinde tek başına ele alındığında çeşitli dezavantajlara sahip olabilir ancak, burada çoklu temsil, temsiller arası geçiş ve fonksiyon kavramının tek değişkenden iki değişkene genelleme yaklaşımları ile birlikte ele alınmıştır.

Bu çalışma öğrencilerin fonksiyon kavramını tek değişkenden iki değişkene genellemelerine odaklanmış olmasına karşın, öğrencilerin iki değişkenli fonksiyonları anlama süreçleri konusunda sonuçlar ortaya koymuştur. Bu bağlamda, öğrencilerin iki değişkenli fonksiyon bilgileri ve bu kavramla ilişkili becerilerine göre farklı gruplara ayrıldıkları görülmüştür. Genel fonksiyon kavramına ilişkin anlama seviyeleri, öğrencilerin bu çalışmada ortaya çıkan kavramsal grupları ve araştırmacının deneyimleri göz önünde bulundurularak iki değişkenli fonksiyon kavramının anlama seviyelerinin bazı göstergeleri elde edilmiştir. Buna göre, iki değişkenli fonksiyonları anlama seviyesi eylem olan bir öğrenci, verilen girdiye karşılık gelen çıktıyı bulma gibi hesaplamaları yapabilir. Fonksiyon durumlarını algılama açısından ise böyle bir öğrenci tablo temsillerindeki fonksiyonları algılayabilir. Ayrıca böyle bir öğrenci, cebirsel ya da grafik temsillerinde fonksiyon durumlarını algılayabilmek için ezbere geliştirdiği yollarla cebirsel manipülasyonlar yapabilir ancak, doğru yanıtı vermiş olsa bile fonksiyon sürecini algılayamamıştır. Böyle bir öğrenci bazı özel yüzeylerin grafiğini ezbere çizebiliyor olsa bile üç boyutlu uzay bilgisi ile fonksiyon şemasını ilişkilendirememiştir. Fonksiyon kavramını anlama seviyesi eylem olan bir öğrenci, fonksiyon süreci ile üç boyutlu uzay bilgisini hiçbir şekilde ilişkilendiremez. Üstüne üstlük bu öğrenciler, iki değişkenli bir fonksiyonun tanım ya da değer kümesi elemanı olarak sıralı üçlüleri verebilirler.

İki değişkenli fonksiyonları anlamanın süreç seviyesi de, genel fonksiyon kavramını anlamanın süreç seviyesinde olduğu gibi oldukça karmaşık gözükmektedir. Bu seviyede öğrenciler, genel fonksiyon sürecini iki değişkene taşırlar ve tek değişkenli fonksiyonların bazı anahtar özelliklerini iki değişkene genellemeye başlarlar. Ayrıca iki değişkenli fonksiyon süreci ile üç boyutlu uzay bilgileri bu seviyede ilişkilendirilmeye başlanır. Süreç seviyesinin başında, öğrencilerin çoğu cebirsel yaklaşıma sahiptirler. Yani, fonksiyon durumlarını grafik temsillerinde de cebirsel analiz ile inceleme eğilimindedirler. İki değişkenli fonksiyon grafikleri ile uygulama yaparak deneyim kazandıkça, fonksiyon durumlarını grafik temsillerinde düşey doğru testi kullanarak algılamaya başlarlar. Ayrıca bu öğrencilerin, yüzey çizimlerini fonksiyon süreci ile üç boyutlu uzay arasındaki ilişkileri göz önünde bulundurarak çizmeye başlamış olmaları gerekir. Bu öğrenciler, iki değişkenli fonksiyon grafiği olan bir yüzeyin izdüşümünü alarak tanım ve değer kümesi bulma konusunda henüz başarılı olmasalar bile, iki değişkenli fonksiyonların tanım ve değer kümesi ve özellikle bu kümelerin elemanları ile ilgili yeterli ve doğru bilgiye sahip olmuş olmalılardır.

Öğrenciler iki değişkenli fonksiyonları anlamada nesne seviyesine yükseldiğinde ise, genel fonksiyon kavramını her yönü ile iki değişkenli fonksiyonlara taşımış ve her temsilde verilen iki değişkenli fonksiyon durumlarını algılayabilir hale gelmiştir. Bu öğrencilerin iyi seviyede üç boyutlu uzay bilgisine ve bu bilgileri iki değişkenli fonksiyonlar ile ilişkilendirme becerisine sahip olmuş olmaları gerektiğinden, iki değişkenli fonksiyonların grafik temsillerini düşey doğru testi ile algılayabilirler ve iki değişkenli fonksiyon grafiği olan yüzeylerin izdüşümünü alarak tanım ve değe kümelerini elde edebilirler. Başka bir deyişle, öğrencinin iyi bir üç boyutlu uzay şemasına sahip olup olmaması, iki değişkenli fonksiyonları anlamada nesne seviyesine yükselmesinde oldukça etkilidir.

İki değişkenli fonksiyonlar konusunda alan yazına eklenen çalışmalar, iki değişkenli fonksiyonların temsilleri (Yerushalmy, 1997) ve öğrencilerin iki değişkenli fonksiyonların grafik temsillerini anlamaları (Trigueros ve Martinez-Planell, 2009) konularına odaklanmıştır. Alan yazına eklenen bu çalışmaların sonuçları ve burada verilen çalışmadan elde edilen sonuçlar doğrultusunda, iki değişkenli fonksiyonların öğrenilme sürecini her yönü ve detayları ile ortaya çıkaracak gelecek çalışmalar desenlenebilir. Ayrıca desenlenebilecek bu çalışmalar, çok değişkenli analiz konularının öğrenilme süreçleri konularında ileride yapılabilecek çalışmalara da ışık tutacaktır.

Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri • Educational Sciences: Theory & Practice - 11(1) • Winter • 484-499

Generalizing Single Variable Functions to Two-variable Functions, Function Machine and APOS

Tangül (UYGUR) KABAEL[a]
Anadolu University

Abstract

The focus of this study in which the theoretical framework of APOS was used is students' generalizing function notion from single variable to two-variable function concepts in Analysis II course in the elementary mathematics education program. In the teaching process, teaching activities that support generalizing the function notion with multiple representations and relations between them and the function machine were used. For data collection, two tests on each of single and two-variable function concepts and interviews with six students were used. It was concluded that the students' understanding level of function concept and students' schema of three-dimensional space is fundamental for their construction of two-variable function. Moreover, significant results that can support prospective studies for students' conceptual levels of two-variable functions were obtained.

Key Words

Function Notion, Two-variable Function Concept, APOS, Function Machine.

Mathematics educators have paid attention to the function concept, which in fact deserves this attention, by supporting the literature with their studies on this concept. There are many different studies on the concept of function; however, all of them are on the notion of general function or the concept of single variable function. The studies on the concept of two-variable function, which requires transferring the notion of general function and many aspects of single variable function are few. Nonetheless, promising development is that this concept has started to be studied recently. Two-variable function concept, which has quite importance for science, engineering, mathematics and mathematics education students, is one of the fundamental concepts of advanced mathematics. Since understanding two-variable functions requires transferring not only general function notion but also key aspects of single variable functions, this causes difficulty for most of the students (Montiel, Vidakovich, & Kabael, 2008). Moreover, generalizing geometric properties of functions to two-variable functions also requires sufficient knowledge of three-dimensional geometry and visualization, which makes difficult to understand geometric properties of two-variable functions for students. Trigueros and Martinez-Planell (2009) emphasized the necessity of relating different representations of functions to understand geometric properties of function related to visualization. Yerushalmy (1997) stated the complexity of generalizing single variable functions to two-variable function and emphasized that this complexity depends on both the concept and its representation. He insisted on the importance of multiple representations and relation between them in the process of generalizing function notion from single variable to two-variables. The significance of multiple representations and relations between them has been highlighted in most of the studies (Bower, & Lobato, 2000; Breidenbach, Hawks, Nichol, & Dubinsky, 1992; Carlson, Oehrtman, Thompson, 2007; Christou,

a *Correspondence:* Assist. Prof. Tangül (UYGUR) KABAEL. Anadolu University, Faculty of Education, Department of Elementary Education, Yunus Emre Campus, Eskişehir/Turkey. E-mail: tuygur@anadolu.edu.tr. Phone: +90 222 335 0580-3406 Fax: +90 222 335 0573.

Elia, & Gagatsis, 2004; Ferrini-Mundy & Graham, 1990; Janvier, 1987; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989; Sierpinska, 1992; Yerushalmy, 1997). Trigueros and Planell (2009) who have studied on geometrical aspects related to students' notion of the two-variable function emphasized that relating treatments of representations with converting different representations should be paid attention before abstract concepts related to functions are given. Meanwhile, they stated that the table representations of functions were not analyzed in their study, the reason of this was not that table representation is less important. Conversely, they insisted that different representations of functions should also include table representation.

This study is on students' generalizations about the concept of function from single variable to two-variables through two-variable calculus course in which function machine was used as a cognitive root. After review of general function concept at the beginning of the course, multiple representations (table, algebraic, graph) and relation between them were used in the teaching process of two-variable functions. For each representation, generalizing the function notion from single variable to two-variables was emphasized during this process.

Our research questions are:

1. What is the relationship between the students' construction of two-variable function concept and their conceptual levels of general function concept?
2. What is the relationship between students' construction of two-variable function concept and their schema of three-dimensional space?
3. What is the relationship between students' concept definitions for the single variable and two-variable function concepts?
4. What is the effect of function machine on students' understanding of single and two-variable function concepts?

Function Machine as a Cognitive Root

Tall, McGowen and DeMarois (2000) defined the notion of cognitive root as follows:

A *cognitive root* is a concept that:

- is a meaningful cognitive unit of core knowledge for the student at the beginning

of the learning sequence,

- allows initial development through a strategy of cognitive expansion rather than significant cognitive reconstruction,
- contains the possibility of long-term meaning in later developments,
- is robust enough to remain useful as more sophisticated understanding develops.

(Tall et al., 2000, p. 3)

Tall et al. (2000) suggested using the function machine (input-output box) as a cognitive root while teaching the function concept.

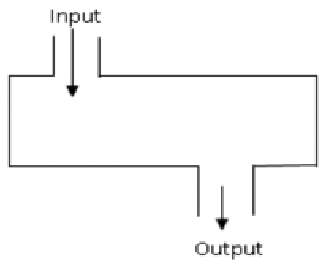


Figure2.
Function Machine

Theoretical Framework

APOS is a specific theoretical framework for research and curriculum development in collegiate mathematics education. We will briefly describe APOS in this paper, but for more details reader can refer to Asiala et al. study in 1996. According to the APOS theory, a learner's specific mental constructions are called *action, process*, *object*, and *schema*. An action is any transformation of objects to obtain other objects. The individual perceives an action as an explicit algorithm so as an externally driven. When the individual reflects on the action and constructs an internal operation, s/he *interiorizes* the action to a process. When the individual performs actions on a process, s/he *encapsulates* the process as a mathematical entity, or an object. Furthermore, a *schema* is a collection of actions, processes, objects and other schemas linked consciously or unconsciously in a coherent manner in individual's mind.

Conceptual Levels of the Function Concept

Dubinsky and his colleagues (Breidenbach et al., 1992; Dubinsky, 1991; Dubinsky & Harel, 1992) studied the conceptions of function concept. According to these studies, a subject who is at the level of action is able to calculate the value of the function for a function formula and a point. The subject, whose understanding of function concept is at the action level, has difficulties while interpreting a situation as a function unless a formula for computing values is given. Besides, the inverses of functions and the notion that the derivative of a function is a function are difficulties for such a subject. According to Dubinsky (1991), most students' idea of function is completely related with "*formula*", and a typical example of such a student for a function is an algebraic expression like x^2+3. Furthermore, Dubinsky added that such a student does not have the notions of domain and range, and s/he cannot relate the graphs with the functions.

When the subject's conceptual level reaches the process conception of function, s/he can think of a function as receiving one or more inputs that are independent variables, performing one or more operations on the inputs and returning the results as outputs that are dependent variables. According to Dubinsky, perceiving a situation that can be related with function means to view the situation as an action on objects. That is, action is interiorized. Regarding the graph of a function, Dubinsky stated that the subject, whose conceptual level is process, can coordinate the process of a function and its graph. In other words, s/he can comprehend that the height of the graph at a point x on the horizontal axis is precisely the value $f(x)$. This means that the subject relates the physical shape of the graph with the behavior of the function. Moreover, Dubinsky and Harel (1992) put forth that the process conception of function is very complex. They found that process conception of function contains the following four factors.

1. Restrictions students possess about what a function is. The three main restrictions observed are:

(a) the *manipulation restriction* (you must be able to perform explicit manipulations or you do not have a function), (b) the *quantity restriction* (inputs and outputs must be numbers), (c) the *continuity restriction* (a graph representing a function must be continuous)

2. The severity of the restriction. Some students feel, for example, that before they are willing to refer to a situation as a function, they personally have to know how to manipulate an explicit expression to get the output for a given input. Other students are satisfied with the presence of an expression even though they admit that they don't know how to deal with it.

3. Ability to construct a process when none is explicit in the situation, and students' autonomy in such a construction.

4. Uniqueness to the right condition; confusion with 1-1. We argue here that this issue is related to a process conception. According to our theoretical perspective, the confusion that is prevalent among students can only be resolved in terms of the process conception. The process notion entails a unique finishing point, whereas the idea of 1-1 is about uniqueness of starting point (Dubinsky and Harel, 1992, pp. 86-87).

The individual, whose conceptual level reaches object level, realizes that transformations can act on process. That is, a subject, who perceives manipulations of functions such as adding or multiplying, encapsulates the process conception of function to an object.

Method

The context of the study is two-variable calculus course given in the mathematics education program in education faculty of a university. The study was conducted with 23 students, whose instructor was author of the study through the spring semester of 2007-2008 academic year. At the beginning of the course, a test on the single variable functions was prepared and after validity and reliability study of the test (Miles & Huberman, 1994; Yıldırım & Şimşek, 2003) applied to the students to evaluate their conceptions of general function concept. Since students must generalize the function notion from single variable to two-variables in this course, single variable function concept was reviewed after the first test. Function machine was used as a cognitive root in this revision. To see whether the students' understandings of function concept was changed or not, another test on single variable function concept was prepared as similar to the previous test and administrated to the students after revision. Then, the process of instruction of two-variable function concept started. Representations and converting between different representations of not only single variable functions but also two-variable functions were paid more attention in the course. Furthermore, a lot of tasks were designed to gain the students' generalizing the different representations from single variable to two-variables. Function machine was used as a cognitive root also in treatment process of two-variable functions. After two-variable function notion, different representations (algebraic, geometric, set of triples, table) and drawings of some special surfaces were given; a test on two-variable functions was prepared and conducted. In the teaching process, a lot of tasks, which required perceiving function situations in the algebraic or graph representations, were posed to the students. Beside these tasks, finding domain and ranges of two-variables functions in the both algebraic and graph representations were emphasized. Then, teaching process of limit, continuity, directed derivative and double integral notions for functions of two-variable started. At the end of the course, another test on two-variable functions was prepared and applied. It is indisputable that comprehension of two-variable function concept needs to be developed, but we thought that we could estimate students' understanding levels of two-variable function concepts in a similar manner to the conception levels of general function concept in order to see the developments from single variable to two-variables. After analyzing the final test, for clinical interview (Clement, 2000; Ginsburg, 1981), six students were selected among the students, whose conceptual levels were determined as (at least) process for both single and two-variable function concepts because the tests were prepared to assess whether the subject's conceptual levels are in process or at lower level. It was emphasized to select the students in various conceptual developments through the tests.

Analysis

Since a student's explanations about function notion might not be consistent in different situations or items, we attempted to perceive student's function conception, considering her/his all responses as a whole. An individual, whose function conception is process, should perceive a function situation and convert between different representations (Dubinsky, 1991), thus, when the student was able to perceive function situations only in table representations, also if s/he was able to convert between graph, algebraic, and table representations, her/his conceptual level was interpreted as relatively weak process conception. At the same time, if such a student was unsuccessful about converting between representations, it was thought that such a student's conception of function must be transference from action to process level. Furthermore, a student, who was not able to perceive function situations in any representation, was determined to be at action level for function concept.

When we examined students' definitions in the first test, we found that most of them had manipulation restriction and some of them had also quantity restriction. Moreover, most of the students struggled to convert given graph representation to algebraic representation firstly, thus it was interpreted that they were to know how to manipulate an explicit expression to investigate whether a situation was a function or not. So, these students should have had severity restriction (Dubinsky & Harel, 1992) On the other hand, if a student perceived all function situations in all representations, and converted between algebraic, graph and table representations, the conceptual level should have been at least process level in this case. Since the second test was prepared in a similar way to the first test, the second test was also analyzed in the way mentioned above.

As indicated, we analyzed the students' conceptual levels for two-variable functions in a similar way to the conception levels of general function concept to facilitate following students' generalizations from single variable to two-variables through the tests. A student, whose conceptual level for function concept is process should perceive function situations (Dubinsky, 1991) on the basis of this argument, if a student had perceived two-variable function situations in graph and algebraic representations, we interpreted that her/his conceptual level should have been at least process. Once such a student perceived function situations in graph representations with algebraic approach, that is, converting given graph to algebraic representation firstly in order to perceive situation, we interpreted that her/his conceptual level as process with severity restriction.

After analyzing the students' responses to the third item, we saw that almost all students had difficulties with finding domain and range of the function, whose graph was given. Some of them were aware that the elements of domain and range of a two-variable function are pairs and real numbers respectively, even if they were not able to project the surface successfully. We considered although they had the notions of domain and range of two-variable function, they could not project the surface to find the domain and range exactly, due to their difficulties with three-dimensional space. Thus, we interpreted the conceptual level of such a student as process, if s/he was also able to perceive the function situations. Conceptual levels of such students were determined as process level with severity restriction when they had algebraic approach in graph representations. Some other students had dimensional difficulties with domain and range. For instance, some of them gave the element of domain or range as (x,y,z). In other words, they had serious difficulties with the notions of domain and/or range of a two-variable function. If such a student had perceived the functions in graph and algebraic cases successfully, it seemed to us that s/he had weak process conception of two-variable function. When such a student also had difficulty with perceiving functions, then we thought that her/his conceptual level must be action.

On the other hand, two students were successful in all items, but with algebraic approach. They were able to obtain domain and range in the third item apart from perceiving the function situations in the first and second items successfully in the first test on two-variable functions. Their difficulties were only with graph representations. They were able to perceive function situations by algebraic way also in graph representations as most students did. That is, they were able to convert between graph and algebraic representations, but due to their difficulties with three-dimensional geometrical knowledge and visualization, they were not able to coordinate the function process and the surface in the space. We interpreted their conceptual level as at least process.

The findings of the last test on two-variable functions were analyzed in a similar way. Since the students had developed their knowledge about two-variable functions with the treatments of two-variable calculus concepts, we had the students, who were successful about both perceiving functions in graph and algebraic cases by vertical line test and algebraic analysis respectively, and about determining the domain and range of the function whose graph was given. Their conceptual levels seemed to us as at least relatively strong process.

Findings

Findings of Tests on Single Variable Functions

Most students' responses to the tasks of the first test, in which the function situations, whose independent variable is x, are required in graph and algebraic representations, provided evidence of focusing on the independent variable notion by overriding the function notion. They investigated the situations, whose independent variable is x, with the algebraic formula not only in algebraic but also in graph representations by determining firstly the algebraic formulas of the graphs. Table representations were the only cases in which most students (16 out of 23) could perceive the function situations in the first test. All students could find the input corresponding to the given output for the function given by algebraic formula in both tests. Seventeen students out of 23 could convert the given graph representation to table representation. The students who had mistakes in this task could not perceive the output corresponding to the input, in which the function is discontinuous in the first test. Almost all students (except two students) could draw the graph of partial function given by algebraic formula, while 12 of them drew a whole circle instead of semi-circle regardless of range of the function in the second item of the sixth task. Similar to the first test, the graph representation of the function given by algebraic formula, which is the lower semi-circle, is required. Most students, who drew whole circle instead of upper semi-circle in the first test, considered the range of function and drew lower semi-circle in the second test. Only four students drew whole circle instead of semi-circle in the second test. For the definition of function, various types of definitions related to the function concept were given in the first test. Definitions given in the first test were similar to the definitions that Vinner and Dreyfus (1989) had. Only four students could give an acceptable definition. These students defined the concept of function as a relation such that each elements of domain corresponds to only one element of range. Other students defined the concept of function variously: They determined the class in the definition like "*term*", "*rule*", "*sequence of operations*", "*system of variables*" and "*expression*". When the definitions of function in the first and second tests were compared, it was seen that the students' development was surprising. Eighteen subjects gave correct definition of function concept, which included the notions of input-output and transference with the uniqueness to the right condition. Most of them gave the class as a special relation, and the rest of them gave the class as a correspondence in the definition. Also three of remaining five students had input-output and transference notions, but one of them gave the class as a rule and two of them gave the class as a machine in their definitions.

Findings of Tests on Functions of Two-Variables

The most conspicuous result obtained from the first test on functions of two-variables is that almost all students (21 out of 23) had algebraic approach. That is, they struggled to determine the algebraic representation of the graph first, and then made algebraic analysis to investigate whether the situation is a function or not. Then, they had indications in the second test on single variable functions that they developed to investigate the function situation in the graph representations without algebraic formula. In other words, they abandoned algebraic approach in the second test on single variable function notion, but they again had algebraic approach at the beginning of teaching process of two-variable functions. After treatments of two-variable calculus concepts through the semester, four of them again abandoned algebraic approach, and gained to investigate the function situations in the graphs by coordinating the function process and shape of graph. They perceived function situations by using vertical line test in graph representations in the last test at the end of the semester. Four of the remaining students had algebraic approach in the graph representations in all tests. It was a considerable development that 13 students could perceive the function situations in the graph representations by using vertical line test in the last test on functions of two-variable.

In the algebraic representations of the first test on functions of two-variables, except one student, who could not abandon the complexity about independent variable notion, all students made algebraic analysis by expressing the algebraic representation as $z=f(x,y)$, and they chose correct items. However, after analysis, it was seen that some of them (four students) made analysis without perceiving input-output and transference notions in the function situations. These students had indications in their expressions that they had memorized to make algebraic analysis.

Algebraic representation of a partial function was given in the second item in the last test on functions of two-variable. It was observed that the students abandoned making memorized algebraic analysis in this test after treatments of two-variable calculus concepts. Most students (19 out of 23) could perceive that this could not be a function. Furthermore, five students drew the graph of surface firstly, and then perceived the situation on graph by using vertical line test. It was seen that these students used vertical line test also in the first item, which includes graph representations. Also another four students drew the graph of surface correctly, but they perceived the situation in algebraic way, not by using the vertical line test.

The item, in which most of the students had difficulties, is the third item of the first test on two-variable functions. Graph of a surface of elliptic paraboloid was given, and domain and range of the function were required. Only two students were able to give both domain and range correctly. Some students demonstrated that they were not able to coordinate the function's process and its graph. Two students indicated that they did not understand the height of the graph at a point *(x,y)* on the horizontal axis is the value of $f(x,y)=z$ because they gave the elements of range as *(x,y,z)*. Similarly, three students, who did not have the notion that elements of domain of a two-variable function should always be pairs, gave the elements of domain as *(x,y,z)*, where two students gave elements of both domain and range as *(x,y,z)*. Other students demonstrated they had the notions that the elements of domain and range of a two-variable function should be always ordered pairs and a real number respectively. They were able to give the elements of domain or range correctly, but they could not determine the region or interval respectively. It was seen that most students' difficulties with domain were about projecting since they gave the domain as

$$\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1\right.\right\}$$

instead

$$\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}\leq 1\right.\right\}$$

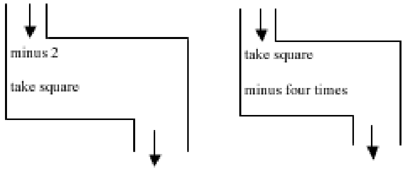
of . As can be seen, the domain and range of the function, whose graph was given, were required also in the last test. It was seen that the students' difficulties with projecting continued also in this test. For instance, some students (three) projected the surface to the coordinate axis separately instead of projecting to the plane. However, the students did not generally give the elements of domain or range wrongly as in the previous test. Only one or two students used triple *(x,y,z)* as the element of domain and range respectively. In the last test, the number of students, who were successful about determining the domain increased from three to 10.

Findings of Interviews

The interviews, which were also designed for data triangulation, enabled us to comprehend whether the subjects' conceptual levels, which were determined at least project level according to the results of the tests were actually higher than the process or not. The interview tasks were prepared as follows:

1. According to you what is a function?

2.



What do the figures on the up remind you?
What are the functions the figures on the up represent?

3. Is there a relation between the functions, which are represented with above machines?
4. According to you, what do following notations mean?

$$* f : D_f \subset \Re \to \Re \qquad * f^{-1} \qquad * f \circ g$$

5. Could you give me a function whose inputs are functions?

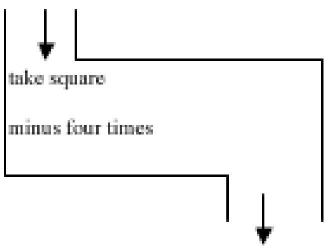
Prompt if necessary: *Let's remember what the function machine is?

* Is there any restriction about the inputs of a function machine?

* Can the inputs of a function machine are also functions?

* Do you know such a machine?

6. What is two-variable function?
7.



What are the functions the figures on the up represent?

8. Is the algebraic expression of $z=f(x,y)=5$ a function situation? Why? Could you represent this algebraic expression graphically?
9. Could you represent the algebraic expression of $z=x^2 + y^2$ graphically? Could you find the domain and range of the function? How do you find?

10.

(x,y)	*(2,1)*	*(3,2)*	*3,1)*	*4,4)*
f(x,y)	*1*	*3*	*6*	*4*

x	*1*	*3*	*4*	*6*
g(x)	*2*	*6*	*8*	*12*

According to the tables given above, can the algebraic expression of g(f(x,y)) be possible?

What does this algebraic expression mean? Could you find the following values?

**g(f(3,2)   *g(f(4,4)*

We present some indications of process level, which have been revealed from literature, (Carlson et al., 2007; Dubinsky, 1991; Dubinsky & Harel, 1992) and related tasks of interview are presented in the following:

- Defining or explaining a function as a input-output process that transforms each input to only one output (1,6)
- Perceiving a function situation (8)
- Converting a function situation to another representation (2, 7, 8, 9)
- Understanding equality of two functions (3)
- Finding domain and range of a function (9)
- Combining a function process with another function process (10)

Apart from above indications, we considered the subjects' all responses as a whole to see their conceptual levels. With the fourth and fifth tasks, we questioned whether the subject was able to see a function as an object as seen in the following excerpts.

We gave numbers to the interviewed students from one to six. We will explain some students' results of the interview analysis briefly and more detailed results for other students.

Results of the First Student: According to the analysis of interviews, first student's conceptual level for function notion was determined as at least process, while her conceptual level was estimated as relatively weak process conception with severity and manipulation restrictions at the beginning of the course. After review of function notion with function machine, first student, who were not able to perceive function situations neither in graph nor in algebraic representations in the first test, gained to perceive function situations successfully in graph and algebraic cases with vertical line test and algebraic manipulations respectively. In the interview, she perceived the same functions rapidly. She demonstrated her knowledge about input-output and transference of function notions, while the interviewer and she were talking about the given notations. Furthermore, she was able to give the inverse and composition operations as examples of functions, whose inputs are also function, so her conceptual level for function concept seemed to be object in the interview.

In the first test on two-variable functions, it seemed that her difficulties were about coordinating function notion with three-dimensional space schema. She was able to perceive function situations in both algebraic and graph cases, but perceived function situations with algebraic manipulations also in graph representations by converting the graphs to algebraic representations firstly. She had difficulties also with domain and range. Her conception seemed to us weak process conception with severity and maybe manipulation restriction. At the end of the course, she had capability of perceiving function situations with vertical line test in some graph cases, and she gained dimensional notion of domain of a two-variable function. Consequently, we estimated her conceptual level of two-variable function as process conception. When the two-variable function notion was questioned, the manipulation restriction that seemed to be in the responses of the first student in the test items on two-variable functions was not observed in the interviews. In addition to defining two-variable function correctly, not only was she able to draw the graph of given function but also obtain the domain and range of function by projecting accurately. That is, it was seen that she coordinated the process of function and three dimensional space notion. These capabilities of her indicated that her conceptual level of two-variable function was *at least* process level.

Results of the Second Student: The second student demonstrated a good understanding of single and two-variable function notions in the tests, but she had a lot of difficulties in the interview. It seemed that the second student's conceptual level was relatively weak process conception with severity, manipulation, and quantitative restrictions in the first test. Then, she gained to perceive function situations in both graph and algebraic cases in the second test, whereas she was not able to perceive functions geometrically in graph representations. At the end of the analysis of this test, her conceptual level of single variable function was determined to be process conception with severity and manipulation restrictions. In the first test on two-variable functions, she was able to respond all items correctly, but again with algebraic approach. That is, her severity restriction continued for the two-variable functions and her conceptual level estimated as strong process conception with severity restriction. In the last test, it seemed that she perceived function situations in some graph cases geometrically, so her conceptual level was considered to be relatively strong process conception. However, the results of the interview about two-variable functions are not consistent with the results of the tests. Regarding single variable functions, the qualitative restriction that she had in the tests was obvious also in the interview. Moreover, qualitative restriction prevented her from seeing a function as an object. We estimated her conceptual level of two-variable function notion as weak process conception at the end of the study.

Results of the Third Student: The third student's conceptual development of function notion was different from the previous two students. This student was not able to abandon algebraic approach neither in tests nor in the interview. That is, she had severity restriction in all tests and interview. Her conceptual levels were determined as relatively weak process conception with severity restriction, process conception with severity and manipulation restrictions, process conception with severity and manipulation restrictions, and lastly process conception with severity restriction. She had manipulation restriction in her general function notion also in the interview, but according to all responses in the interview, her conceptual level seemed to be object level. Also in the interview, it was observed that she had severity restriction, which means to have algebraic approach. She was able to determine domain of a two-variable function from its algebraic representation, but she was unsuccessful about determining domain from graph. On the other hand, she was able to draw graphs of surfaces correctly, yet she did not have the capability of coordinating her schema of three-dimensional space and general function concept schema. Thus, we concluded that the lack of this capability prevented her from developing her conceptual level of two-variable function notion. After the interview, her conceptual level of level of two-variable function notion seemed to be process.

Results of the Fourth Student: The fourth student's conceptual capabilities were similar to the third student's. On the other hand, there were differences between their conceptions that the fourth student abandoned algebraic approach after review of function concept, but she gained severity restriction again in the two-variable function concept. That is, this student gained more capabilities about coordinating function notion with geometrical knowledge than the third student gained in the revision. Although the third student always had algebraic approach, both of the third and fourth students' conceptual levels of function concept were determined as object level at the end of the interviews. In the aspect of two-variable functions, the fourth student demonstrated some knowledge about coordination between schemas of three-dimensional space and function notion. For instance, her knowledge about coordination between the schemas was obvious while she was drawing the surface, on the contrary to the third student's drawing in the interviews. Moreover, the third student attempted to determine domain of two-variable function from algebraic representation, while the fourth student was able to find the domain graphically by taking projection even if she was not able to find the domain exactly. She projected the surface to the axis separately. On the other hand, the fourth student' generalizing was not based on independent variable. She generalized general function notion as in the following:

> *"Two-variable function is based on definition of function concept, this time domain consisted of AxB that is, domain consisted of pairs, range is a set, range should already be a set, because it is two-variable function, it has two independent variables and one dependent variable"*

However, her definition and applications were not consistent. She demonstrated a good understanding of two-variable function notion. Her conceptual level of two-variable functions was estimated as strong process.

Results of the Fifth Student: This is the most successful student not only in the interview but also in the tests. In the first test on single variable function notion, she was able to give correct answers except first and second questions in which function situations are required respectively in graph and algebraic representations. She had difficulties about independent variable of a single variable function like most of other students, but she *did not have any restriction*. Her conceptual level seemed to be weak process conception in the first test. In the following test on single variable functions, she was able to perceive function situations in graph and algebraic cases by gaining the notion of variables of a single variable function. Furthermore, she did not have any restriction also in this test, contrary to the most of other students, who had severity restrictions. That is, she was able to perceive function situations of given graphs by using vertical line test without determining algebraic formula. Her conceptual level was determined as relatively strong process conception in the second test. She was able to perceive two-variable function situations also in the first test on two-variable functions, but it was seen that she had severity restriction like most of other students in this test. In the second test on two-variable functions, she abandoned severity restriction. The fifth student's conceptual levels for two-variable function concept were determined as "process conception with severity restriction" and "process conception" in the first and second tests on two-variable function notion respectively. The only difficulty she encountered was about finding domain by projecting graph of surface to the plane in both tests. She projected the surface to axis separately, but she was aware that elements of domain must always be pairs. When we focused on the interview with this student, we concluded that her conceptions were at least object (can be schema) and at least process (can be object) for single variable and two-variable function concepts respectively. She demonstrated her conceptual level for single variable function concept in all tasks with her expressions in the interview.

Results of Sixth Student: The sixth student is the weakest one both in the interview and tests. At the beginning of the course, her conceptual level was determined as action conception in the first test. She struggled to determine the algebraic formulas in the graph representations to perceive function situations like most of the other students, but then she chose all items except the fix as function situation. The only case in which she was able to perceive function situations was table representations. Moreover, she demonstrated that she did not have input-output and transfer notions in the definition item. She gave complicated expressions instead of definition of function. After review by function machine, she gained input-output, transfer notions and unique right condition in definition. She was able to perceive function situations with algebraic approach both in graph and algebraic representations. So, it was interpreted that she had process conception with severity restriction in the second test. In the first test on two-variable function notion, she was able to perceive function situations only in algebraic representations. Furthermore, it was observed that she could not project surface to the plane, even worse she gave elements of domain of two-variable function given by graph as triples, so it could be interpreted she did not have the notion that elements of domain of a two-variable function must be pairs. Besides, she was able to determine two-variable function, but she demonstrated that she had manipulation restriction. Her conceptual level for two-variable function seemed weak process conception with manipulation restriction. She had a little development in the last test on two-variable function notion, so her conceptual level was again weak process. She only abandoned dimensional complexity about elements of domain of a two-variable function, but she projected the surface to the axis separately at that time. That is, again she could not obtain domain of the two-variable function given by graph correctly. This student's weak function conception was also obvious in the interview.

Conclusion

Two-variable function concept is fundamental for most advanced mathematics concepts. Either this concept is given in theoretical manner as in science faculties or in applied manner as in engineering faculties; understanding of this concept needs to generalize a lot of key aspects of single variable functions to two independent variables. As Martinez-Planell and Trigueros-Gaismann (2009) indicated, one of the objectives of an instructor who gives the concept of two-variable function should be helping students develop a deep understanding of general function notion. Also being aware of this necessity, we reviewed general function notion at the beginning of the course. Multiple representations and relation between them are recommended not only in the teaching processes of single variable functions but also in instruction of two-variable functions (Martinez-Planell & Trigueros-Gaismann, 2009). Our instructional approach is consistent with these recommendations. We gave attention to different representations and converting between them. Furthermore, we posed such tasks to students that help them to generalize key aspects of function notion from single independent variable to two independent variables in each representation. Also the students' responses on representations and converting between them supported our approach. Generally, the students did not have much difficulty about converting different representations not only in single variable functions but also two-variable functions.

The relationship between the students' understanding level of function concept and their construction of two-variable function concept is obvious from the data of this study. Thus, we have concluded that students' understanding level of function concept plays a fundamental role in understanding two-variable functions. It has seen that especially being at the object level for the function concept is crucial to reach at least process conception of two-variable function concept. Like Martinez-Planell and Trigueros-Gaismann (2009), we have concluded that most of the students have difficulties with graph representations of two-variable functions. Moreover, we have observed that a student who has object conception of function may have process conception of two-variable function concept even if s/he cannot coordinate the process of two-variable function and the graph. When such student begins to understand the graph of a two-variable function, s/he begins to encapsulate the two-variable function process as an object. If a student's conceptual level for function concept is at most process, s/he may have weak understanding of two-variable function concept. Especially, restrictions prevent students from understanding two-variable function. For instance, quantitative and/or manipulative restrictions prevent students from not only seeing function as an object, but also generalizing function process from single independent variable to two independent variables. Furthermore, if a student has restrictions on general function concept, s/he will transform restrictions to two-variable function concept. We have seen that most students have algebraic approach at the beginning of the understanding process of two-variable function concept. That is, they struggle to determine algebraic formula, and then make algebraic analysis to perceive function situations in the graph representations. Some students can have indications in their algebraic analysis that they transform input-output and function process notions to two-variable functions, while some of others can make algebraic analysis by memorizing. For instance, the student, who has object conception of function concept, can abandon algebraic approach rapidly, and s/he begins to coordinate graph and process of two-variable function. Such a student perceives function situations by vertical line test in graph representations of two-variable functions. Moreover, the student, who has object conception of function concept can reach process level of understanding two-variable function concept even if s/he is not able to abandon algebraic approach due to her/his difficulties about three dimensional geometry. Besides, the student, who has any restriction on function concept, but has coordination of graph and process of single variable functions, can abandon algebraic approach rapidly even if s/he is not at object level. To sum up, we can say that there is a direct relationship between students' construction of two-variable function concept and their conceptual levels of general function concept. Particularly, having object conception of function and restrictions have respectively positive and negative effects on students' understanding two-variable function concept.

In the aspect of graph representations of two-variable functions, we have concluded that students' most problematic point in understanding process of two-variable functions is graph representations. Trigueros and Martinez-Planell (2009) indicated that students' understanding of graphs of two-variable functions is not easy and it is related with their three dimensional space schema. We have seen that generally students can draw graphs of some special surfaces, but some of them can make this drawing by using memorized facts. The students, who have memorized drawing way, may use statements like "lift", as a memorized fact without awareness. Trigueros and Martinez-Planell (2009) emphasized about such words that the use of certain words such as "cutting a surface" or "lifting a curve" enable students to visualize, but the meaning of this kind of sentences should be explicitly discussed in class. We have seen otherwise some students can memorize this kind of sentence as drawing way of surfaces. Such students attempt to perceive function situation algebraically, even if they draw graph correctly by using memorized facts. That is, they cannot coordinate the function process with their three-dimensional space schema. Due to the lack of coordinating capability, they cannot find domain or range from graph by projecting. Moreover, some of such students may not be aware that the elements of domain and range of a two-variable function are always pair and a real number, respectively. On the other hand, the students, who can coordinate the function process with their three-dimensional space schema, reflect these capabilities by their drawing the graph and perceiving function situations in graph representations by using vertical line test. We have observed that such students can perceive function situations in the graph by using vertical line test even if they have some difficulties with three-dimensional space, but they cannot project the graph to the plane to find the domain correctly. Consequently, students' schema of three-dimensional space is fundamental for their construction of two-variable function concept also. However, it is not as much prerequisite as general function conception, because a student, whose function conception is object level, can reach process conception of two-variable functions by her/his algebraic approach even if s/he has weak schema for three-dimensional space.

When we regard students' concept definitions for the single variable and two-variable function concepts, we can conclude that some students transform their knowledge about general function notion to two-variable functions, whereas all of the students who have restrictions on general function notion transform their restrictions from single variable functions to two-variable functions. That is, the student who has correct concept definition of function concept including input-output and transference notions does not mean to have such a concept definition of two-variable function concept. Once we consider students' generalizations of definition of function notion from single independent variable to two independent variables, we have seen that some students generalize concept definition of single variable function notion to two independent variables, while some of others may generalize the concept definition of general function notion to a relation from Cartesian product of any nonempty two sets to any nonempty set, which ensures the unique right condition. On the other hand, we have concluded that a student might demonstrate good understanding of two-variable function concept even if s/he has such a wrong generalization.

We concluded that function machine is effective as a cognitive root on understanding the function concept. We saw that after revision of general function notion with function machine, students gained the notion of independent variable of function, which almost all of them did not have at the beginning of the course. We have been sure that students' achievement about perceiving function situations would have increased, if we had asked the questions like "which are functions?" instead of "which are functions whose independent variable is x?" in the first test. They became confused with these questions at the beginning, but they were aware what was required from them with such questions after they reviewed the function notion with function machine. Moreover, emphasizing with various examples that function machine transforms input of the machine, which is independent variable of function to output, which is dependent variable of function gained the students function process. We used function machine not only at the beginning of the course as a cognitive root, but also through the course. We introduced calculus concepts like derivative or integral also as a function machine whose inputs and outputs are functions. Generally students can make some operations on the set of functions, but they see neither these operations as functions nor the functions as elements of a set. To give such operations on the sets of functions as an example of function machine seemed helpful to gain the students to see a function as an object. Moreover, such examples are helpful to remove the restrictions like quantitative or manipulation. In the interviews, subjects agreed with us about function machine's positive effects on understanding general function notion or two-variable function concept. For instance, the third student's idea about function machine is as following:

Interviewer: What is the effect of function machine on your understanding of function concept?

The third student: It is very helpful. Even if this concept won't be given to me any other time, I know what it means. It has showed to me that there is only one output for every input. Actually, I can apply this machine to other mathematical concepts. I am sure also my friends won't have any difficulty when asked what function is…because we usually do it from memory without awareness if it is not explained concretely, but this machine is really good.

Although this paper has focused on students' generalizing the function notion from single variable function to two-variable function, the obtained results have also informed us about students' understanding of two-variable function concept. In this context, we have seen that the students fell into different groups according to their knowledge and capabilities related to two-variable function concept. Considering the conceptual levels of general function concept, our experiences and students' conceptual groups revealed in this study, we have attained some indications of conceptual levels of two-variable function concept. Accordingly, a student at action level for two-variable function concept can make manipulative calculations like finding the output for given input and algebraic formula of two-variable function. In terms of function situations, s/he may perceive function situations in table representations. Maybe s/he makes some algebraic manipulations by memorizing facts to perceive function situations in algebraic or graph representations, even s/he is able to give correct answer about whether the situation is function or not, but s/he cannot perceive function process. Such a student may draw graphs of some special surfaces by using memorized facts, but s/he does not have coordination between three-dimensional space schema and function schema. The students who are at the action level cannot coordinate function process and three-dimensional space schema anytime. Moreover, they can give triples as elements of domain or range.

Process conceptual level of two-variable function concept seems very complicated as process conceptual level of general function concept. Students transfer general function process to two-variable functions and begin to generalize key aspects of single variable functions to two independent variables. Furthermore, coordinating function process and schema of three-dimensional space begins at this level. At the beginning of process conception, most students may have algebraic approach. That is, they attempt to perceive function situations with algebraic manipulations either in graph or algebraic representations. After their experiences with graphs of two-variable functions, in which they coordinate function process and the shape of graph, they begin to perceive function situations in graph representations by using vertical line test. Moreover, such students should have begun to draw some special surfaces regarding the coordination between function process and three-dimensional space schema. These students should have domain and range notions of two-variable functions and they are aware that the elements of domain and range of a two-variable function are always pairs and real numbers respectively even if they are not able to obtain domain or range from graph representation by projecting.

When students reach object level of two-variable function concept, they should have transfer key aspects of general function concept to two-variable function concepts and they can perceive two-variable function situations in any representations. Since students should have good understanding of three-dimensional space and capability of coordinating their knowledge about three-dimensional space with their two-variable function schema in this level, they can perceive two-variable function situations in graph representations by using vertical line test and obtain domain or range from graph representations by projecting. In other words, whether a student has good understanding of three-dimensional space or not is effective to reach this level.

The studies on understanding of two-variable functions, which have been recently included to literature, have focused on representations of two-variable functions (Yerushalmy, 1997) and in particular, geometric representations of two-variable functions and students' understandings of two-variable functions in graphical representations (Trigueros & Martinez-Planell, 2009). Considering the results obtained in this study with these previous studies, further studies can be designed to clarify more aspects of understanding levels of two-variable functions. Such further studies can contribute to many studies on students' understandings of multivariate calculus concepts.

References/Kaynakça

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education, 2*, 1-32.

Bakar, M., & Tall, D. (1991). Students' mental prototypes for functions and graphs. *Proceedings of PME 15*, *1*,104-111.

Breidenbach, D., Hawks, J., Nichols, D., & Dubinsky, E. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, *23*, 247-285.

Bower, J., & Lobato, J. (2000, April). *Three perspectives in research on functions: Multi-representational, quantitative, and phenomenological*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association. New Orleans, LA.

Carlson, M. P., Oehrtman, M. C., & Thompson, P. W. (2007). Key aspects of knowing and learning the concept of function. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (pp.150-171). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Carlson, M., & Oehrtman, M. (2005). Key aspects of knowing and learning the concept of function. *The Mathematical Association of America Research Sampler*. Retrieved November 2, 2010 from http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_9.html.

Christou, C., Elia, I., & Gagatsis, A. (2004). The nature of multiple representations in developing mathematical relationships. *Quaderni di Ricerca in Didattica, 14*, 150-159.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. In A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 547-589). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 82-94). London: Riedel.

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function, In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA notes 25* (pp. 85-106). Washington: Mathematical association of America.

Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. (1990). Functions and their representations. *Mathematics Teacher*, *83* (3), 209-16.

Ginsburg, H. P. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For Th e Learning of Mathematics*, *1* (3), 4-11.

Janvier, C. (1987). Representation and understanding: The notion of functions as an example. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 67-72). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Martinez-Planell, R., & Trigueros-Gaisman, M. (2009). Students' ideas on functions of two-variables: Domain, range, and representations. *Proceedings of PME-NA* (Vol. 5, pp. 73-80). Atlanta, Georgia: Georgia State University.

Miles, M., & Huberman, M. (1994). .*An expanded sourcebook qualitative data analysis* (2nd ed.). California, CA: Sage Publications.

Montiel, M., Vidakovic, D., & Kabael, T. (2008). Relationship between students' understanding of functions in cartesian and polar coordinate systems. *Investigations in Mathematics Learning*, *1* (2), 52-70.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for Teaching Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of the concept function. In E. Dubinsky & G. Harel (Ed.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagog* (pp. 25-58). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Tall, D. O., McGoven, M., & DeMarois, P. (2000). The function machine as a cognitive root for building a rich concept image of the function concept. *Proceedings of PME-NA*, *1*, 247-254.

Trigueros, M., & Martinez-Planell, R. (2009). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics, 73*, 3-19.

Trigueros, M., & Planell, M. R. (2009). Visualization and abstraction: geometric representation of functions of two variables. *Proceedings of the 29th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Stateline (Lake Tahoe), NV: University of Nevada, Reno.

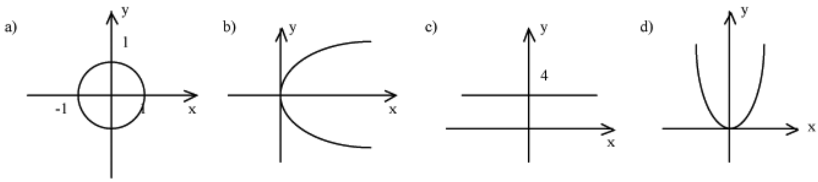
Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 356-366.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2003). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yerushalmy, M. (1997). Designing representations: reasoning about functions of two-variables. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 431-466.

Ek 1: Tek Değişkenli Fonksiyonlar Konusundaki İlk Test:

1. Aşağıdaki grafiklerden hangileri bağımsız değişkeni x olan bir fonksiyon grafiğidir? Neden?



2. Aşağıda verilen tablolardan hangileri bağımsız değişkeni x olan bir fonksiyon temsil eder? Neden?

a)

Girdi	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
Çıktı	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*

b)

Girdi	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
Çıktı	*0*	*2*	*2*	*4*	*4*

c)

Girdi	*0*	*1*	*-1*	*0*	*2*
Çıktı	*1*	*2*	*0*	*-1*	*1*

3. Aşağıdaki eşitliklerden hangileri bağımsız değişkeni x olan bir fonksiyon temsil eder? Neden?

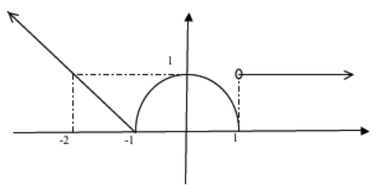
a) $x^2 + y^2 = 1$ b) $y = 4$ c) $x = y^2$ d) $y = 2x^2$

4. $y=5x^2-6$ cebirsel eşitliği ile verilen fonksiyonun aşağıda verilen çıktı değerlerine karşılık gelen girdi değerlerini bulunuz.

a) -1 b) –11

5. Aşağıda verilen grafiği kullanarak tabloyu tamamlayınız.

girdi	çıktı
0	
1	
½	
-1	
-3	



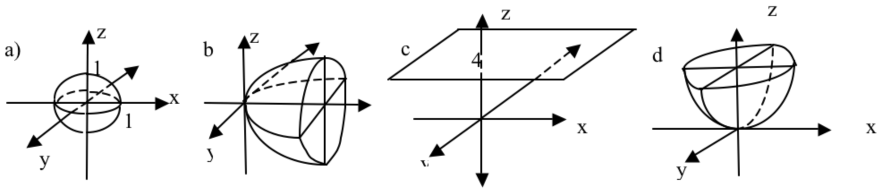
6. Aşağıdaki fonksiyonların grafiğini çiziniz.

$$\text{a)}\ f(x) = \begin{cases} y = -x & ; \quad x < -2 \\ 1 & ; \quad -2 \le x \le 2 \\ 3 & ; \quad x > 2 \end{cases} \quad \text{b)}\ \begin{matrix} f:[-1,1] & \rightarrow & \Re^{+} \\ x & \rightarrow & y \end{matrix}, \quad x^2 + y^2 = 1$$

7. Fonksiyon kavramını tanımlayınız.

Ek 2: İki değişkenli fonksiyonlar konusundaki ilk test:

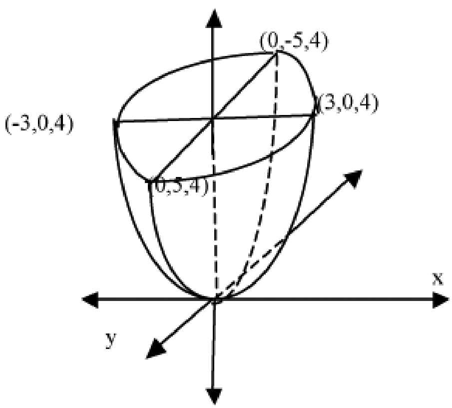
1.Aşağıdaki grafiklerden hangileri bağımsız değişkenleri x ve y olan iki değişkenli fonksiyon grafiğidir? Neden?



2. Aşağıdaki eşitliklerden hangileri bağımsız değişkenleri x ve y olan iki değişkenli fonksiyon temsilidir? Neden?

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ b) $z = 4$ c) $x = y^2 + z^2$ d) $z = x^2 + y^2$

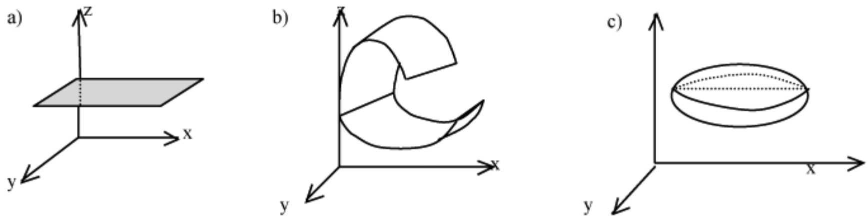
3. Aşağıda grafiği verilen iki değişkenli fonksiyonun tanım ve değer kümelerini bulunuz.



4.İki değişkenli fonksiyon kavramını tanımlayınız.

Ek 3: İki değişkenli fonksiyonlar konusundaki ikinci test:

1.Aşağıdaki yüzeylerden hangileri iki değişkenli fonksiyon temsilidir? Neden?



2. Aşağıda verilen cebirsel ifade bir iki değişkenli fonksiyon temsili midir? Neden

$$f(x,y) = \begin{cases} 4 - x^2 - y^2 & ; \quad 0 \le x^2 + y^2 \le 3 \\ 1 & ; \quad 2 \le x^2 + y^2 \le 4 \end{cases}$$

3. $A = (0, \sqrt{2}, 3)$, $B = (0, -\sqrt{2}, 3)$, $C = (-\sqrt{2}, 0, 3)$, $D = (\sqrt{2}, 0, 3)$, $E = (0, \sqrt{2}, 1)$, $F = (0, -\sqrt{2}, 1)$, $G = (0,2,1)$ $H = (0,-2,1)$, $I = (-2,0,1)$, $J = (2,0,1)$ olsun. Aşağıdaki grafik iki değişkenli bir fonksiyon grafiği midir? Neden?

Aşağıdaki grafik iki değişkenli bir fonksiyon