Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri • Educational Sciences: Theory & Practice • 14(3) • 1203-1230

www.edam.com.tr/kuyeb
DOI: 10.12738/estp.2014.3.1864

Sınıf Öğretmeni Adaylarının Geometrideki Zihinsel Alışkanlıkları*

Nilüfer Y. KÖSE[a]
Anadolu Üniversitesi

Dilek TANIŞLI[b]
Anadolu Üniversitesi

Öz

Zihinsel alışkanlıklar, bireylerin bilgi birikimlerindeki kavramları ve ilkeleri ilişkilendirmesidir. Zihnin geometrik alışkanlıkları ise geometrik kavramların uygulanmasını ve öğrenmesini destekleyen üretici düşünme yolları olarak tanımlanabilir. Sınıf öğretmenleri adaylarının alışkanlıklarının belirlenmesi, onların yetiştirecekleri öğrencilerinin geometrik düşünmelerinin gelişimini etkileyeceğinden dolayı oldukça önemlidir. Bu önem doğrultusunda, bu çalışmada, sınıf öğretmeni adaylarının geometrideki zihinsel alışkanlıklarının belirlenmesi amaçlanmıştır. Bir devlet üniversitesinin Eğitim Fakültesi Sınıf Öğretmenliği programı 3. sınıfında öğrenim gören 57 öğretmen adayı ile gerçekleştirilen bu çalışmada, veriler çevre ve alan kavramları ile ilgili dört açık uçlu geometri problemi ile toplanmıştır. Toplanan veriler zihnin geometrik alışkanlıkları kuramsal çatısının bileşenleri doğrultusunda, betimsel analizin aşamalarına uygun biçimde analiz edilmiştir. Sınıf öğretmeni adaylarının çevre ve alan problemlerindeki geometrik düşünme yollarını ortaya koyan bu çalışma sonucunda, adayların geometrideki zihinsel alışkanlıkların göstergeleri olan bileşenler bağlamında farklı düşünme yollarına sahip olmadıkları belirlenmiştir. Diğer taraftan, adayların problemleri uygun biçimde analiz edemedikleri, akla ilk gelen fikre dayalı olarak davrandıkları, ancak bu eylemlerini bütüne taşıyamadıkları dolayısıyla geometrideki zihinsel alışkanlıklarının istenilen düzeyde olmadığı görülmüştür.

Anahtar Kelimeler

Çevre ve Alan Ölçme, Matematik Eğitimi, Öğretmen Eğitimi, Zihnin Geometrik Alışkanlıkları.

Düşünme, bir sonuca ulaşmak için var olan kavramların ve ilkelerin ilişkilendirildiği zihinsel bir süreçtir. Bu süreç bir takım zihinsel alışkanlıklarla işler ve gelişir. Zihinsel alışkanlıklar; bir problem durumunda kişinin muhakeme, azim, yaratıcılık, ustalık gibi entelektüel davranma yeteneğine sahip olmasıdır. Zihinsel alışkanlıkların işleyişi entelektüel davranışların etkili modellerini seçme eğilimi ve yeteneği anlamına gelir (Leikin, 2007). Diğer bir deyişle, kişi bir problem durumunun çözümünde etkili bir stratejiyi seçmek ve bu stratejiyi uygulamak için kişisel bir eğilim gösterir. Cuoco, Goldenberg ve Mark (1996) tarafından zihinsel alışkanlıklar, her disipline indirgenen genel zihinsel alışkanlıklar ve matematiğe özgü zihinsel alışkanlıklar olmak üzere iki biçimde ele alınır.

Genel zihinsel alışkanlıklar; örüntüyü algılama, araştırma, tanımlama, düşünme, keşfetme, gör-

* Bu çalışma 24-26 Mayıs 2012 tarihinde Rize'de düzenlenen 11. Ulusal Sınıf Öğretmenliği Sempozyumu'nda sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

a *Sorumlu Yazar:* **Dr. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE** Matematik Eğitimi alanında doçenttir. Çalışma alanları arasında öğretmen eğitimi, geometrik ve cebirsel düşünme, öğretmelerin mesleki gelişimi ve nitel araştırma desenleri yer almaktadır. *İletişim:* Anadolu Üniversitesi, Yunusemre Kampüsü, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, 26470 Eskişehir. Elektronik posta: nyavuzsoy@anadolu.edu.tr

b Dr. Dilek TANIŞLI Matematik Eğitimi alanında doçenttir. İletişim: Anadolu Üniversitesi, Yunusemre Kampüsü, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, 26470 Eskişehir. Elektronik posta: dtanisli@anadolu.edu.tr

selleştirme, varsayımda bulunma ve tahmin etme gibi temel özellikleri içerir. Zihnin matematiksel alışkanlıkları ise, sıra dışı durumlarda düşünce deneyleri yaparak, matematikçilerin çalışmalarında izledikleri yolları dikkate alarak, onların çalışmalarında kullandıkları soyutlamaları yaparak sürekli bir muhakeme yeteneğine sahip olma anlamına gelmektedir (Mark, Cuoco, Goldenberg ve Sword, 2009). Zihnin matematiksel alışkanlıklarının temel özellikleri öğrenme basamaklarına göre gelişim gösterir (Cuoco, Goldenberg ve Mark, 2010; Goldenberg, Shteingold ve Feurzeig, 2003; Levasseur ve Cuoco, 2003). Örneğin yükseköğretim matematiği için zihinsel alışkanlıkların temel özellikleri; düşünce deneyleri gerçekleştirme, örüntüleri bulma, ifade etme ve açıklama, temsilleri oluşturma ve kullanma, örnekleri genelleme, kesin bir dille genellemeyi ifade etme ve anlamlandırarak matematiği ortaya çıkarma şeklinde ifade edilebilir (Cuoco ve ark., 2010). Öte yandan ileri matematiksel düşünmeyi (Leikin, 2007) aynı zamanda matematiğin uygulanmasını ve öğrenilmesini destekleyen bu alışkanlıklar matematiksel güç ile eşdeğer görülür. Matematiksel güç, en iyi zihinsel alışkanlıklar bütünü ile tanımlanabilir. Matematiksel güç ile bireyler, deneyimsel düşünceleri uygularlar, olguları araştırırlar, örüntüleri ararlar, mantıklı varsayımlarda bulunurlar, formal ya da tesadüfî durumları tanımlarlar; yöntem, teknik, algoritma ve süreçler hakkında düşünürler; nesneleri görselleştirirler, nesnelerin neden gördükleri gibi olduğunu açıklamak için araştırırlar ve bilişsel fenomenlerle ilgili tartışırlar (Goldenberg, Cuoco ve Mark, 1998).

Gerçekte zihinsel alışkanlık ifadesiyle iki önemli özellik ön plana çıkmaktadır. Bunlar: "Düşünme" ve "alışkanlık"tır. Harel (2007; 2008), zihinsel alışkanlıkların düşünme yönünü "düşünme yolları" kavramıyla açıklar ve düşünme yollarının içselleştirilmesini zihinsel alışkanlık olarak vurgular. Harel'a göre, matematik iki tamamlayıcı bölümden oluşur. Birincisi, gelenekselleşmiş anlama yolları yani matematik topluluğu tarafından kabul edilen tanımlar, aksiyomlar, kanıtlar, problemler ve çözümlerdir. İkincisi ise, düşünme yollarının bir koleksiyonudur yani birinci bölümün genelleştirilmesi için yararlı olan kavramsal araçlardır (Harel, 2008). Düşünme ve anlama yolları arasındaki ayrım, zihnin matematiksel alışkanlıklarının önemini ortaya koymaktadır.

Harel'in (2007, s. 272) düallik ilkesine göre "Öğrencilerin düşünme yolları sadece anlama yollarının oluşumuyla gelişir ve onların ürettikleri anlama yolları sahip oldukları düşünme yolları tarafından belirlenir." Dolayısıyla, Harel hem anlama hem de düşünme yollarının öğrenciler için öğrenme amaçlarına dâhil edilmesi gerektiğini savunur. Zihinsel alışkanlığın alışkanlık özelliğini ise Goldenberg (2009, s. 13), "kişinin iyi edindiği, doğal hale getirdiği ve repertuarına dâhil ettiği, sadece üzerinde durduğu değil yapması olası olan alışkanlıklar" olarak tanımlar. Mason ve Spence (1999), alışkanlık özelliğini "anlık davranışları bilme" kavramı ile Lim (2008) ise, öğrencinin bir problem durumunda o anda sezdiği ve aklına gelen ilk fikre dayanarak bir eylem gerçekleştirdiğinde spontane gelişen "sezgi kavramı" ile vurgular. Lim, aynı zamanda zihinsel alışkanlığı bilişsel bir eğilim olarak belli durumlar karşısında belirli bir biçimde, zihinsel olarak davranma eğilimi olarak ifade eder. Lim (2008), alışkanlık özelliğiyle, "aklına ilk geleni yapma" ya da "aklına gelen ilk yaklaşımın içine dalma" eğilimine gönderme yapar (Watson ve Mason, 2007, s. 2007).

Zihnin matematiksel alışkanlıklarına sahip olma, matematiğin geometri ve cebir gibi alanlarında daha ön plana çıkmakta, zihnin geometrik ya da cebirsel alışkanlıkları olarak tanımlanmaktadır (Driscoll, 1999; Mark ve ark., 2009). Zihnin geometrik alışkanlıkları, geometri öğrenimini ve uygulamasını destekleyen üretici bir düşünme biçimidir. Bu düşünme biçimi; geometrik ilişkilerin incelenmesi ve bu ilişkiler aracılığıyla muhakemeler yapılması, geometrik fikirlerin genellenmesi, geometrik yapılardaki değişen ve değişmeyen özelliklerin araştırılması ve tüm bu bileşenler ile geometrik bir yapının değerlendirmesi (Driscoll, DiMatteo, Nikula ve Egan, 2007) anlamına gelmektedir. Geometrideki zihinsel alışkanlıklar, Driscoll ve arkadaşları (2007) tarafından öğretmenlerin 5.-10. sınıf öğrencilerindeki geometrik düşünmeyi geliştirebilmeleri için nasıl üretici geometrik düşünme yolları tanımlayabilecekleri üzerine 2004-2008 yılları arasında gerçekleştirilen çalışma sonucunda ortaya konmuştur. Çalışmada hem öğrencilerin hem de yetişkinlerin başarılı birer geometrik problem çözücüler olmaları için düşünme yolları tanımlanmış ve geometrik düşünme kanıtlarının analizlerine yer verilmiştir. Çalışma sonucunda geometrideki zihinsel alışkanlıklarının bir çatısı tanımlanmış ve geometrik düşünmenin geliştirilmesinde bu çatı öğretimsel bir araç olarak kullanılmak üzere önerilmiştir. Zihnin geometrik alışkanlıkları dört temel özelliğe sahiptir. Bunlar: İlişkilerle muhakeme, geometrik fikirleri genelleme, değişmezleri araştırma, keşif ve yansıtmayı dengelemedir. İlişkilerle muhakeme; geometrik şekillerle ilgili düşünme, geometrik ilişkileri araştırma ve özel muhakeme becerilerini kullanmadır. Geometrik fikirleri genelleme, geometrik olguları anlama ve tanımlamadır. Bu süreçte aşamalar, sonuçlar ve geometrik şekillerin özellikleri genellenir. Değişmezleri araştırma, geometrik yapıda değişen ve değişmeyen durumların ve özelliklerin araştırılmasıdır. Keşif ve yansıtmayı dengeleme, bir problem durumunda çeşitli yolları deneme ve düzenli olarak durum değerlendirmesi yapmak için ön adımlara dönmedir (Driscoll ve ark., 2007). Driscoll ve arkadaşlarının (2007) çalışması dışında ulusal alan yazında da konuya ilişkin iki çalışmaya rastlanmıştır. Bunlar Koç ve Bozkurt'un (2012), matematik öğretmen adaylarının silindirin hacmine yönelik bilgilerinin incelendiği çalışmaları ile Özen ve Köse'nin (2013), matematik öğretmenleri üzerine gerçekleştirdikleri geometrik cisimler konusundaki ders imecesidir (lesson study). Bunların dışında ulusal çalışmaların daha çok Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri üzerine gerçekleştirildiği görülmektedir. Koç ve Bozkurt çalışmalarında, birinci sınıfa devam eden 172 matematik öğretmen adayından, kare olmayan dikdörtgen bir kâğıttan oluşturulabilecek iki farklı silindirin hacmini karşılaştırmalarını ve bu süreçte kullandıkları zihnin geometrik alışkanlıklarını belirlemelerini ve açıklamalarını istemişlerdir. Bu adayların yarısı iki farklı silindirin hacim karşılaştırmasını hatalı yanıtlamış, doğru yanıtlayan adayların yarısı ise yanıtlarını savunucu herhangi bir matematiksel açıklamada bulunamamıştır. Özen ve Köse'nin çalışmasında ise, üç matematik öğretmeni ile sekiz hafta boyunca ders imecesi oturumları yapılmış; bu oturumlarda öğretmenler ortaokul sekizinci sınıf matematik programında yer alan geometrik cisimleri (prizmalar, piramitler, koni, küre) inşa etme, geometrik cisimlerin temel elemanlarını belirleme, yüzey açınımını oluşturma, alan ve hacim bağıntılarını elde etme kazanımlarına yönelik ders planlarını geliştirmiş, uygulamış ve değerlendirmişlerdir. Çalışmanın sonucunda öğretmenlerin, yapılan ders imecesinin planlama, uygulama ve değerlendirme aşamalarında birbirlerinin geometrik düşünmelerinden yararlandığı, araştırma sürecinde öğretmenlerin giderek daha güçlü geometrik ilişkiler kurduğu ve geometrik düşünmelerinin geliştiği görülmüştür. Uluslararası ve ulusal alan yazında konuya ilişkin az sayıda çalışmanın yer aldığı ve bu çalışmaların da ağırlıklı olarak matematik öğretmeni ve matematik öğretmen adayları üzerinde yoğunlaştığı görülmektedir.

Zihnin; geometrik alışkanlıklar bağlamında ilişkilerle muhakeme, geometrik fikirleri genelleme, değişmezleri araştırma**,** keşif ve yansıtmayı dengeleme gibi temel özelliklerinin diğer bir ifade ile düşünme yollarının öğrencilere kazandırılması sadece geometri değil diğer derslerdeki başarıyı da artıracaktır. Nitekim Cuoco (2008), tüm bu zihinsel alışkanlıkların öğretim programlarının önemli bir öğesi ve matematik programlarının örgütleyici bir ilkesi olduğunu savunmaktadır. Öte yandan öğretmenlerin de öğrencilerinin bu alışkanlıkları içselleştirebilmelerine yardımcı olmaları ayrıca bir önem taşımaktadır. Şüphesiz öğrencilere bu zihinsel alışkanlıkların ya da daha açık ifadeyle, matematiksel düşünme yollarının kazandırılamaması, onların üst düzey düşünme becerilerini ve entelektüel gelişmişliği kazanmalarını da zorlaştıracaktır. Bu doğrultuda öğretmenlerin öğrencileri ile birlikte geometrik problemler üzerinde çalışmaları, onların kendi düşünmelerini dile getirmelerine yardımcı olmaları ve geometrik düşünmelerinin geliştirilmesine katkı sağlayacak öğretim deneyimleri geçirmelerini sağlamaları gerekmektedir. Öğretmenlerin böylesi bir ortamı sağlamalarının temelinde ise sahip oldukları zihinsel alışkanlar yatmaktadır. Bu durum ise akla öğretmen eğitim programlarını getirmektedir. Öğrencilerde matematiksel bir temel oluşturan sınıf öğretmenleri adaylarının geometrideki zihinsel alışkanlıklarının belirlenmesi onların yetiştirecekleri öğrencilerin geometrik düşünmelerinin gelişimini etkileyeceğinden dolayı oldukça önemlidir. Özellikle geometrideki zihinsel alışkanlıkların daha küçük yaşlardan itibaren kazandırılması öğrencilerin daha sonraki öğrenim yaşantılarını etkileyeceği düşünülürse araştırmanın önemi daha da belirginleşmektedir. Ayrıca geometrik düşünmenin gelişimini destekleyen zihnin geometrik alışkanlıkları çatısının, öğretmen eğitimine yeni bir yaklaşım kazandırması açısından bu çalışmanın alana katkı getirebileceği de söylenebilir.

Araştırmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı, sınıf öğretmeni adaylarının çevre ve alan kavramlarına ilişkin geometrik zihinsel alışkanlıklarının belirlenmesidir.

Yöntem

Araştırmanın verilerinin toplanması, çözümlenmesi ve yorumlanmasında nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir.

Katılımcılar

Araştırmanın katılımcılarını, bir devlet üniversitesinin Eğitim Fakültesi Sınıf Öğretmenliği programı 3. sınıfında öğrenim gören 57 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Katılımcıların seçiminde amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme kullanılmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2003). Öğretmen adaylarının seçiminde kullanılan ölçüt, adayların 3.

sınıfa devam ediyor olmalarıdır. Ayrıca sınıf öğretmenliği programındaki matematik alan derslerinin ve öğretim derslerinin az sayıda olması, bu bağlamda adayların geometri alan bilgilerinin sınırlı kalması, bu çalışmada sınıf öğretmeni adaylarının katılımcı olarak seçilmesinde etkili olmuştur.

Verilerin Toplanması

Araştırmanın verilerinin toplanmasında zihnin geometrik alışkanlıkları çatısı altında, adayların ilişki arama ve muhakeme, değişmezleri araştırma/inceleme, geometrik fikirleri genelleme, keşif ve yansıtmayı dengeleme zihinsel alışkanlıklarını ortaya çıkarıcı 4 açık uçlu sorudan oluşan bir testten yararlanılmıştır. Testte yer alan sorular, Driscoll ve arkadaşlarının (2007) öğretmenlere ve onların 5.-10. sınıf öğrencilerinin geometrik düşünmelerini geliştirmelerine yönelik projelerinde kullandıkları problemlerden ölçme ile ilgili olanlar arasından seçilmiştir. Seçilen problemler geometrik şekillerin çevre ve alanlarının hesaplanması ile sınırlandırılmıştır. Problemlerden ilki olan otlak problemi çemberler ve çember parçaları ile birbirine bağlanan geometrik yapıların çevre ve alan hesaplamalarını içeren dokuz alt sorudan oluşmaktadır. İkinci problem olan çevre problemi, iki köşe noktasının koordinatları ve çevresi verilen bir üçgenin üçüncü köşe noktasının olası tüm koordinatlarının belirlenmesi ile ilgilidir. Farklı yol ile alan hesabı problemi kareli bir kâğıt üzerinde verilmiş üç çokgenin alanının hesaplanması ve bu hesaplamada kullanılan yöntemlerin sorgulandığı üç alt sorudan oluşmaktadır. Son problem olan alan problemi ise, iki köşe noktasının koordinatları ve alanı verilen bir üçgenin üçüncü köşe noktasının olası tüm koordinatlarının belirlenmesi ve üçgenin özel durumlarının sorgulandığı altı alt sorudan oluşmaktadır. Problemlerden bir örnek detaylı olarak Ek 1'de sunulmuştur.

Hazırlanan test kapsam geçerliliği için matematik eğitimi alan uzmanlarına sunulmuştur. Ardından hazırlanan bu test, pilot olarak bir üst sınıftaki 10 öğrenciye uygulanmıştır. Daha sonra zihnin geometrik alışkanlıklarının her bir göstergesi dikkate alınarak 10 öğrencinin yanıtları iki alan uzmanı tarafından bağımsız olarak okunmuş, görüş birliği ve görüş ayrılıkları belirlenerek testin güvenirliği %95 olarak hesaplanmıştır (Miles ve Huberman, 1994). Problemlerin ve alt soruların anlaşılırlığı ve yanıtlama süreside de dikkate alınarak problemlerde herhangi bir değişiklik yapılmamıştır. Açık uçlu bu test iki ayrı günde uygulanmış, 2 soru içeren her bir uygulama için öğretmen adaylarına 60 dakika süre tanınmıştır.

Verilerin Analizi

Açık uçlu test yoluyla toplanan veriler öncelikle numaralandırılmış, daha sonra zihnin geometrik alışkanlıkları kuramsal çatısının bileşenleri doğrultusunda betimsel analizin aşamalarına uygun olarak analiz edilmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2003). Analiz süreci aşağıda açıklanmıştır.

Araştırmada öncelikle, araştırma sorularından, araştırmanın kavramsal çerçevesinden ya da görüşmede yer alan boyutlardan yola çıkarak veri analizi için Driscoll ve arkadaşlarının (2007) kuramsal çerçevesi kullanılmıştır. Bu bağlamda, her bir geometrik zihinsel alışkanlık (ilişkilerle muhakeme, değişmezleri araştırma/inceleme, geometrik fikirleri genelleme ve keşif ve yansıtmayı dengeleme) için geliştirdikleri bileşenler tema, her bir bileşenin göstergeleri de alt tema ve kategori olarak alınmıştır. Tema, alt tema ve kategoriler Tablo 1'de örneklerle detaylı olarak açıklanmıştır.

Ardından, alınan çerçeveye göre veriler okunmuş, düzenlenmiş ve ilişkilendirilmiştir. Kodlama süreci araştırmacı ve matematik eğitimi alan uzmanı tarafından birbirlerinden bağımsız olarak gerçekleştirilmiştir. Daha sonra araştırmacı ve alan uzmanı bir araya gelerek yapmış oldukları analizleri karşılaştırmış, görüş birliği ve görüş ayrılığı olan maddeleri belirlemişlerdir. Temalar ve alt temalar için güvenirlik çalışması yapılarak analiz sonuçlarının güvenirliği sağlanmıştır. Kodlama güvenirlik hesaplaması için Miles ve Huberman'ın (1994) önerdiği uyuşum yüzdesi kullanılmıştır. Güvenirlik formülüyle hesaplanan sonucun %70'in üzerinde olması durumunda (Miles ve Huberman, 1994) kodlayıcılar arası güvenirliğin sağlanmış olduğu kabul edilmektedir. Bu araştırmada yapılan hesaplamalar sonucunda araştırmanın güvenirliği %90 çıkmış ve araştırma güvenilir kabul edilmiştir.

Son olarak, araştırmadan elde edilen bulgular arasındaki neden-sonuç ilişkilerinin açıklanması için önce tema ve alt temalar arasındaki ilişkiler şekiller aracılığıyla görselleştirilmiş, ardından bu ilişkiler adayların sorulara verdikleri yanıtlardan doğrudan alıntılardan yararlanılarak yorumlanarak sunulmuştur. Doğrudan alıntılarda öğretmen adaylarının isimleri yerine kodlamalar kullanılmıştır.

Bulgular

Sınıf öğretmeni adaylarının geometrideki zihinsel alışkanlıklarının belirlenmesinin amaçlandığı bu araştırmadan elde edilen bulgular her bir probleme göre ayrı ayrı sunulmuştur.

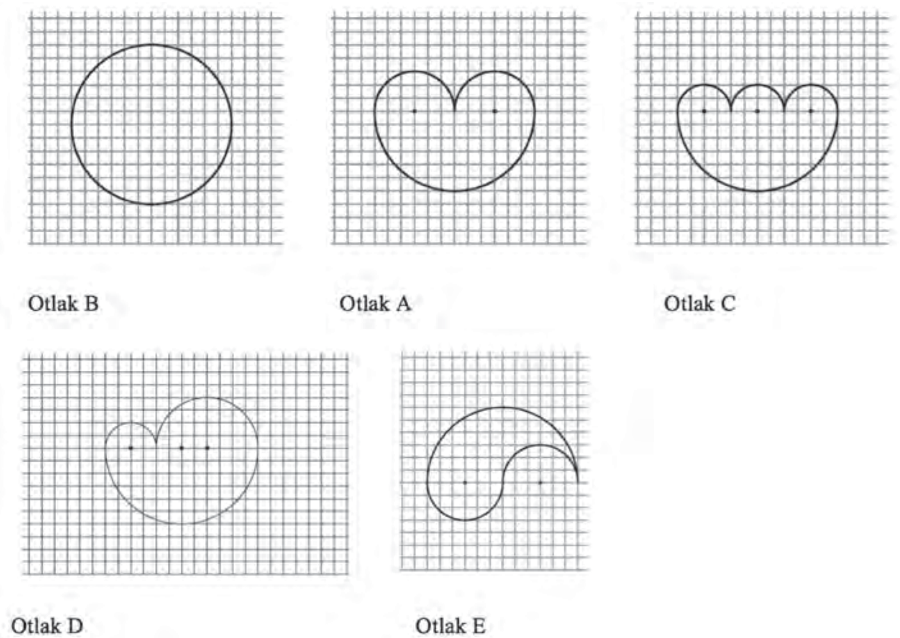
Tablo 1.
Tema, Alt tema ve Kategori Betimlemeleri

Temalar	Alt Tema ve Kategoriler		
İlişkilerle Muhakeme	***Çoklu şekiller üzerine odaklanma*** • İki geometrik şeklin *bazı ortak* özelliklerinin belirtilerek karşılaştırılması (örn. "sadece çevre ya da sadece alan ilişkisine odaklanma") • İki geometrik şeklin *ortak tüm* özelliklerinin belirtilerek karşılaştırılması ve *nedeni* (örn. "çevre ve alan ilişkisine odaklanarak yarıçap ile ilişkisini fark etme")	***Tek bir şekildeki parçalar üzerine odaklanma*** • Bir geometrik şekil içerisindeki düzenleri-yapıları fark etme ve ilişkilendirme (örn. "bir otlaktaki yarım çemberleri ve daireleri görme ve ilişkilendirme") • Bir geometrik şekil içerisinde yapılar oluşturma (örn. "bir otlağın alanını hesaplamada yapıyı tamamen değiştirerek yarım daireye tamamlama") • Bir geometrik şekildeki parçaları görerek iki geometrik şekli ilişkilendirme (örn. "eğer bu iki yarım çemberi birleştirirsem bir çember oluşur")	**Özel muhakeme becerilerini kullanma** • İki ya da daha fazla geometrik şekil ile ilgili orantısal akıl yürütme (örn. "otlak A'daki küçük yarım çemberin çevresi Otlak B'deki çemberin çevresinin ¼ üne eşittir.") • Geometrik şekilleri ilişkilendirmek için simetriyi kullanma
Geometrik Fikirleri Genelleme	***Az gelişmiş*** • Özel durumları göz önünde bulundurma (örn. "çevresi 12 br olan üçgen için sadece 3-4-5 dik üçgenini ve eşkenar üçgeni düşünme") • Özel durumlarla uyuşan diğer örnekleri bulma (örn. 3-4-5 üçgeninin doğruya göre simetriğini düşünme) • Özellikleri değiştirerek genellemeyi deneme. "Bunun başka bir yolu daha olmalı" der, ama onu nasıl genelleyeceğini bilemez.	***Geçiş*** • Örnek durumda sonsuz küme için çalışır ancak sadece ayrık kümeyi dikkate alır. (örn. "üçgende iki kenarın uzunlukları toplamının 8 olmak zorunda olduğunu anlama ve bu durumu yeni örneklere genelleme, tüm değerler toplamı 1 ile 8 arasında mı olacaktır? diye düşünme") • Sonsuzluğu görür ancak kümeyi sınırlar ya da küme ile ilgili yanlış sonuca ulaşır, yanlış geometrik şekiller ile temsil eder.	***Gelişmiş*** • Tüm çözüm kümelerini görür ve neden daha fazlasının olmadığını açıklar. • Bir geometrik şekil sınıfı için evrensel doğru olan bir kural belirler. • Kuralları ya da problem durumlarını geniş bir içeriğe yerleştirir.
Değişmezleri Araştırma / İnceleme	***Dinamik Düşünme*** • Statik bir durum ile ilgili dinamik olarak düşünme (örn. "Bu şeklin alanını düşünmek için kesmeyi ve parçalar etrafında döndürmeyi denemeyi düşünüyorum.") • Bir noktanın ya da şeklin sürekli hareketinin etkisi ile ilgili düşünme ve bir nokta ile diğeri arasındaki oluşumu tahmin etme • Dönüşümler altında sınırlı ve uç durumları dikkate alma (örn. "Bu üçgenin köşesi bir çember üzerinde hareket ettirilirse hangi noktada üçgenin alanı maksimum olur?")	***Etkilerin kanıtlarını kontrol etme*** • Uygulanan bir dönüşümde her şeyin değişmediğini hissetme • Uygulanan bir dönüşümde değişmezleri fark etme ve neden onların değişmez olduğunu açıklama (örn. "Bir üçgeni bir doğruya göre yansıttığınızda üçgene eş bir üçgen elde edersiniz. Çünkü yansıtma aynı kâğıt katlama gibidir ve şeklin biçimi ve boyutları değişmez.")	
Keşif ve Yansıtmayı Dengeleme	***Göze çarpan keşif*** • Sezgisel ya da tahmin yoluyla çizme, oynama ve keşfetme (örn. "Bu çalışıyor gibi görünmüyor. Hadi daha farklı bir şey deneyelim…") • Tanıdık stratejiler deneme (örn. "Daha önce ne denemiştim?")	***Göze çarpan son amaçlar*** • İlerlemenin bir kaldırım taşı olarak düzenli şekilde büyük resme geri dönme • Amaca ulaşmak için yardımcı olabilecek ara adımları tanımlama • Final durumunun neye benzediğini tanımlayabilme	

Otlak Problemi

Öğretmen adaylarına Şekil 1'de verilen her bir otlağın çevresi için gerekli çit sayısının ve alanlarının sorulduğu ilk problem, ilişkilerle muhakeme bağlamında, onların çevre ve yarıçap arasında bir ilişki kurmalarını, ardından bu ilişkiye dayalı olarak bir genellemeye ulaşmalarını gerektirmektedir. Ayrıca bu problem aracılığıyla geometrik zihinsel alışkanlıkların bileşenlerinden biri olan değişmezlerin araştırılması ile ilgili adayların geometrik bir dönüşüm altında değişen ve değişmeyen özellikleri fark etmeleri ve açıklamaları da beklenmiştir.

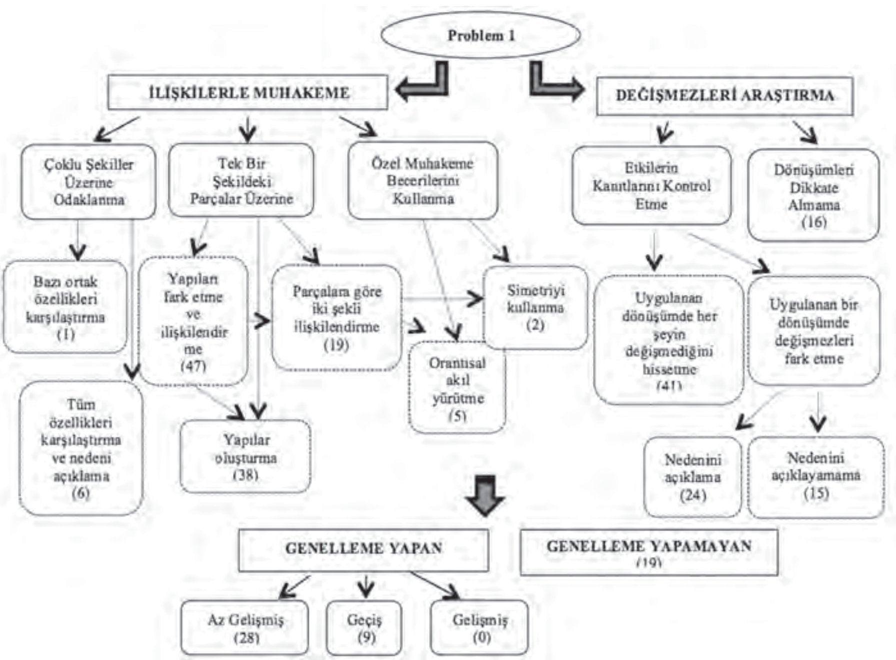
OBu problemde, ilişkilerle muhakeme kapsamında öğretmen adayları Şekil 2'de görüldüğü gibi çoklu şekiller üzerine odaklanma, tek bir şekildeki parçalar üzerine odaklanma ve özel muhakeme becerilerini



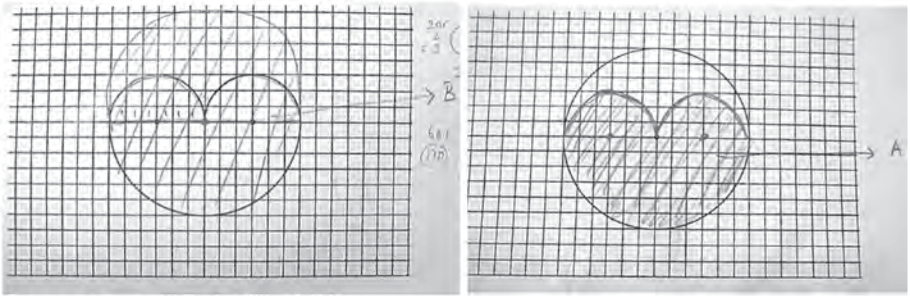
Şekil 1.
Problemde Verilen Otlaklar

kullanma olmak üzere üç biçimde düşünmüşlerdir.

Çoklu şekiller üzerine odaklanan 7 öğretmen adayının, otlakların ortak özelliklerini diğer bir ifade ile çevre-yarıçap ilişkisini belirleyerek otlaklar ara-



Şekil 2.
Adayların Problemde Gösterdikleri Geometrik Zihinsel Alışkanlıkları

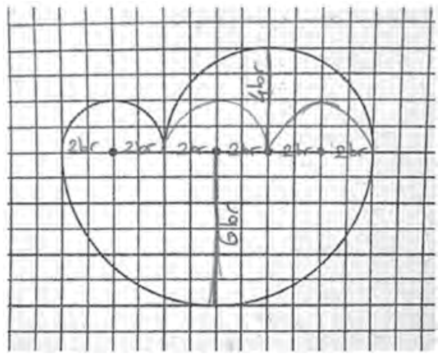


Şekil 3.
Öğretmen Adayının ($Ö_{16}$) Çizimi

sında bir karşılaştırma yoluna gittikleri görülmüştür. Bu adaylardan sadece biri çoklu şekillere odaklanmasına karşın sadece çevre-yarıçap ilişkisini ifade etmiş, alan ile ilgili muhakemesinde formüle dayalı düşünmüştür. Diğer altı aday ise otlaklar arasında hem çevre hem de alan ilişkisindeki muhakemelerinde, otlaklar arasındaki eş ve benzer yapıları dikkate almışlardır. Bir öğretmen adayının çizimi ve düşüncesi örnek olarak sunulabilir.

> "Ben burada alan modelini kullanarak karalama ile büyük ya da küçük olma durumunu düşündüm. A'yı tamamlayarak, B'de ise A'ya benzeterek B'nin A'dan daha büyük olduğunu gördüm. Aynı zamanda çemberlerin içinde kalan kare birimleri karalayarak da buna ulaşabilirdim. En fazla tam karalanmış kare sayısı hangisinde ise o büyük olacaktır." ($Ö_{16}$)

İlişkilerle muhakeme kapsamında adayların büyük bir çoğunluğu, tek bir şekildeki parçalar üzerine odaklanarak her bir otlağın çevresini ve alanını formül kullanarak (örneğin Ç=2πr ve A=πr^2) ayrı ayrı hesaplamışlardır. Bu adaylar her bir otlak içerisindeki çemberleri ve daireleri fark ederek birbirileri ile ilişkilendirmişlerdir. Ancak verilen tüm otlaklar arasında, özellikle çevre-yarıçap ilişkisi ile ilgili, yeterli düzeyde bir muhakemede bulanamamışlar, daha çok işlemsel ve formüle dayalı düşünmüşlerdir. Bu adaylardan bazılarının yarım çemberleri ve daireleri tamamlayarak yeni geometrik yapılar oluşturdukları, bazılarının da bu yapılar içerisindeki parçaları ilişkilendirdikleri görülmüştür. Özellikle verilen otlağın alanının hesaplanmasının istendiği sorularda adayların yarım çemberleri bütüne tamamlayarak hesaplama yaptıkları, gerekli çit sayısının istendiği sorularda ise diğer otlaklar arasındaki kısmi karşılaştırmalarla otlağın içindeki parçalar arasındaki ilişkiyi ifade ettikleri görülmüştür. Örneğin adaylardan biri Otlak D için gerekli olan çit sayısını tahmin ederken Otlak C'den yararlanmış, her iki otlak için gerekli çit sayısının eşitliğinin nedenini sadece özel örnek durumu dikkate alarak açıklamıştır.

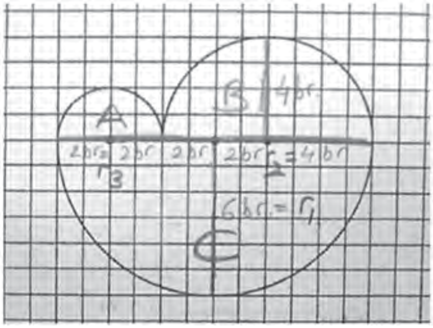


Şekil 4.
Öğretmen Adayının ($Ö_{44}$)Çizimi

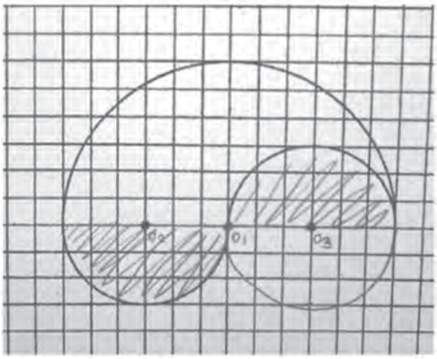
> "Otlak D için gerekli çit sayısı Otlak C için gerekli çit sayısına eşit olabilir. Yani onun çevresi de 12 çıkacak diye tahmin ediyorum. Çünkü çevresini hesaplarken 2πr ile hesaplıyoruz. Otlak B'deki eşit 3 yarım çemberden biri aynen Otlak D'de de var. Diğer ikisi ise yarıçapı 4 birim olan daha büyük bir çemberi oluşturuyor. Hesaplamada bir fark olmayacağını düşünüyorum, çünkü 2.(2π.2)= 2π.4" ($Ö_{44}$)

Parçalara göre iki şekli ilişkilendiren 7 aday ayrıca, orantısal akıl yürütme ve simetriyi kullanma şeklindeki özel muhakeme becerilerini de kullanmışlardır. Orantısal akıl yürüten adaylardan biri Otlak D için gerekli çit sayısının tahmin edilmesinin istendiği soruda pi sayısını 3 alarak Şekil 5'teki gibi yapıyı parçalamış ve tahminini şu şekilde açıklamıştır:

> "6 br.'lik yarım çemberin (C) çevresini önceden 18 olarak bulmuştuk. En küçük çemberin çevresi (A) ise 6 br. Diğer çember (B) bu çemberin 2 katı olduğuna göre çevresi de iki katı yani 12 birimdir. Bu durumda toplam çevre 36 birimdir." ($Ö_{47}$)



Şekil 5.
Öğretmen Adayının (Ö$_{47}$) Hesaplaması

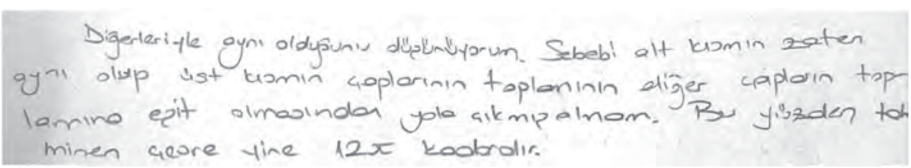


Şekil 6.
Öğretmen Adayının (Ö$_{16}$) Otlak E'yi Yapılandırması

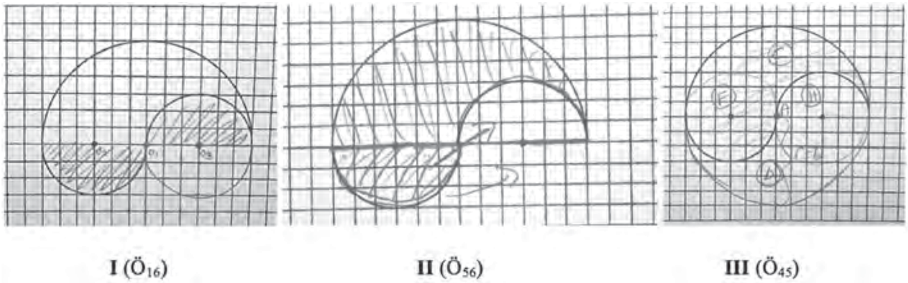
Özel muhakeme becerilerini kullanan öğretmen adaylarından bir diğeri ise, Otlak E için gerekli çit sayısını hesaplarken doğruya göre simetriyi kullanarak Şekil 6'daki gibi geometrik bir yapı oluşturmuş, bu yapı içerisindeki geometrik şekilleri ilişkilendirmiş ve diğer otlaklarla çevre uzunluklarının eşit olduğunu "*Ben O$_3$ merkezli çemberin üst tarafının simetrisini alt tarafına çizdim. Yani A, B, C, D ve E otlakları birbirine eşitlendi.*" biçiminde ifade etmiştir.

Verilen problem incelendiğinde otlakların yarı çevre uzunluklarının eşit olduğu görülmektedir. Diğer yarı çevre uzunlukları ise Otlak A'nın 3π+3π, Otlak B'nin 6 π ve Otlak C'nin 2π+2π+2π'dir. Benzer şekilde Otlak D'nin yarı çevre uzunluğu ise 4π+2π, Otlak E'nin de yarı çevre uzunluğu Otlak B'deki gibi 3π+3π biçiminde bulunabilir. Görüldüğü gibi verilen otlakların çevre uzunlukları birbirine eşittir. Büyük çemberin çapı 12 br. olduğundan dolayı çapa yerleştirilen küçük yarı çemberler için alınacak yarıçap uzunlukları 12 toplamını veren sayılardır. Problemde çemberin yarı çevre uzunluğu $Ç = 2\pi r / 2 = \pi r$ ve diğer yarı çevre uzunlukları $Ç = Ç_1 + Ç_2 = \pi r_1 + \pi r_2$ ya da $Ç = Ç_1 + Ç_2 + Ç_3 = \pi r_1 + \pi r_2 + \pi r_3$ olarak elde edilir. Böylece dağılma özelliğinin etkisi ile $Ç = \pi (r_1 + r_2 + r_3)$ toplam çevreyi verir. Ancak aynı ilişki, alan için geçerli değildir. Böylesi bir genellemeyi hiçbir öğretmen adayı ifade edememiş, sadece genellemenin geçiş düzeyindeki 9 aday yarıçaplar arasındaki ilişkiyi sözel olarak belirtmişlerdir. Bununla birlikte 28 aday sadece özel durumları dikkate alarak bir genellemede bulunmuş, 19 aday ise hiçbir genellemede bulunamamıştır. Otlak D'nin çevresinin tahmin edilmesinin sorulduğu soruda genellemenin geçiş düzeyinde bulunan bir aday, ulaştığı sonucu Şekil 7'deki gibi ifade etmiştir.

İlişkilerle muhakeme ve geometrik fikirlerin genellenmesi açısından tartışılan bu problemin diğer bir bileşeni ise değişmezlerin araştırılmasıdır. Bu bağlamda Otlak E'nin alanının iki farklı yöntem ile araştırılmasının istendiği son bölümde adayların çoğunluğunun (41 aday) hesaplamada, dönme gibi geometrik bir dönüşümden (Şekil 8-II) yararlandıkları görülmüştür. Ancak hiçbir adayın "dönme dönüşümü" gibi geometrik bir dil kullanmadığı ve bu adaylardan sadece 24'ünün bu dönüşümde alanların neden değişmediğini açıkladığı görülmüştür. Diğer taraftan adayların 16'sı alan hesabında herhangi bir dönüşümü dikkate almayarak bütüne tamamlama (Şekil 8-III) ya da ayrı ayrı hesaplama yoluna gitmişlerdir. Ayrıca Otlak E'nin çevre uzunluğunun hesabı için bir aday dışındaki adaylar, doğruya göre simetriyi düşünmemiş, üstelik Otlak E'nin Otlak B ile benzer bir yapıya sahip olduğunu bir aday dışında hiçbir aday fark etmemiştir (Şekil 8-I).



Şekil 7.
Öğretmen Adayının (Ö$_{55}$) İfadesi

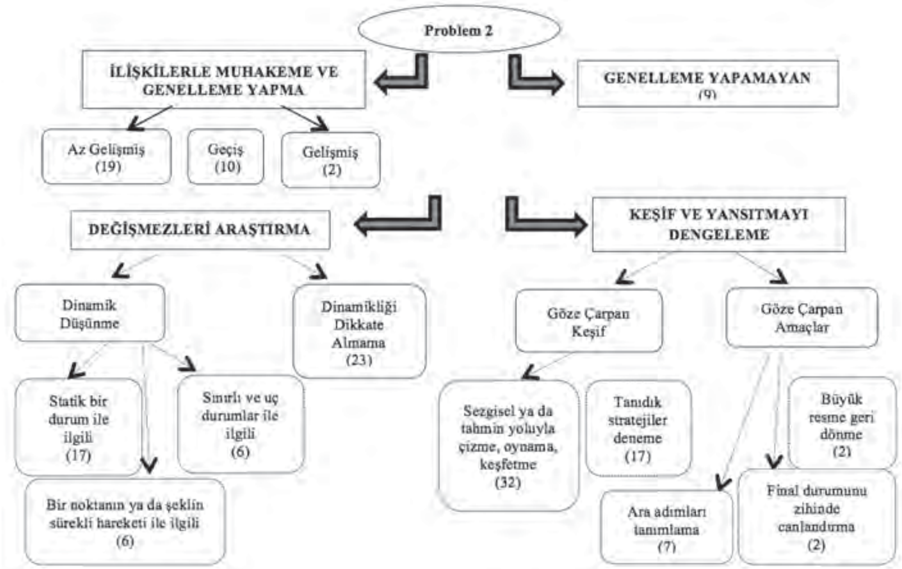


Şekil 8.
Etkilerin Kanıtlarını Kontrol Etme

Çevre Problemi

Öğretmen adaylarına "Çevresi 12 birim olan üçgenin iki köşesi (4,0) ve (8,0) noktalarında bulunmaktadır. Üçüncü köşe noktası için olası tüm durumlar nedir? Hepsini elde ettiğinizi nasıl bilebilirsiniz?" sorusu ikinci problem olarak sorulmuştur.

Çevre problemi aracılığıyla; ilişkilerle muhakeme ve 9'da görüldüğü gibi, geometrik zihinsel alışkanlıkların her bir bileşeni ön plandadır. İlişkilerle muhakeme ve genelleme kapsamında probleme ilişkin öğretmen adaylarının 9'unun hiçbir genellemede bulunamadığı, buna karşın 19 adayın az gelişmiş, 10 adayın geçiş ve 2 adayın ise gelişmiş genelleme düzeyinde yer aldıkları görülmüştür. Ayrıca 17 aday bu soruyu yanıtsız bırakmıştır.

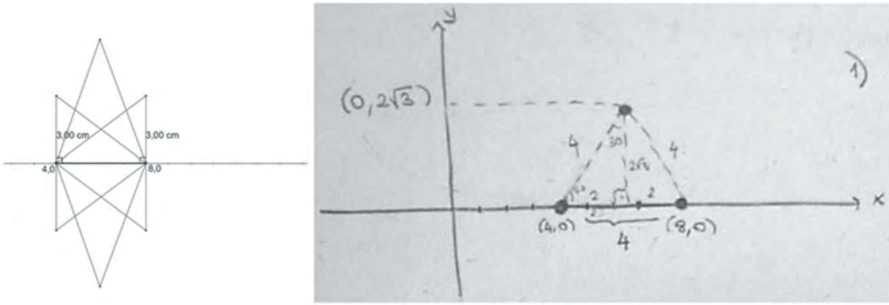


Şekil 9.
Adayların Problemde Gösterdikleri Geometrik Zihinsel Alışkanlıkları

genelleme yapma, değişmezleri araştırma, keşif ve yansıtmayı dengeleme bileşenleri bağlamında öğretmen adaylarından, olası üçüncü noktanın koordinatlarının (4,0) ve (8,0) noktalarını kapsayan yaklaşık bir elips üzerinde olduğunu anlayabilmeleri, bu noktaların hareketliliği (dinamikliğini) dikkate alabilmeleri ve bir üçgenin oluşumu için kenarlar arasındaki ilişkiyi fark edebilmeleri beklenmiştir. Bu problemde, Şekil

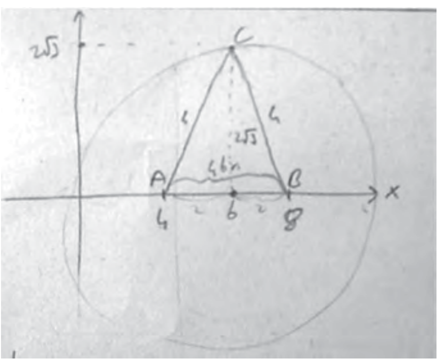
Genellemenin az gelişmiş düzeyinde yer alan adaylar (19 aday) Şekil 10'da sunulduğu gibi sadece tabanı 4 birim olan 3-4-5 üçgeni ya da ikizkenar üçgen gibi özel üçgenleri oluşturmuşlardır.

Diğer taraftan genellemenin geçiş düzeyinde bulunan adaylar (10 aday) iki kenar uzunlukları toplamının 8, farkının 4'ten küçük olmak zorunda ol-



Şekil 10.
Az Gelişmiş Düzeydeki Genelleme Örneği

duğunu anlamışlar ve üçgen eşitsizliğine dayalı, ara noktalarda üçgenin oluşup oluşmadığını incelemek amacıyla çeşitli değerler vererek üçgenler oluşturmuşlardır. Genellemenin gelişmiş düzeyinde bulunan az sayıda aday (2 aday) ise üçgen eşitsizliğini dikkate alarak olası noktalar kümesini çember olarak belirlemişlerdir. Her ne kadar bu adaylar gelişmiş düzeyde genellemede bulunmuş olsalar da ulaştıkları genelleme kusurludur. Bir öğretmen adayının çizimi ve düşünme süreci örnek olarak verilebilir.



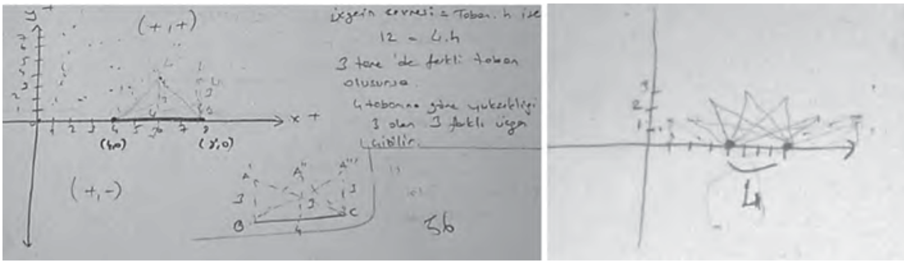
Şekil 11.
Gelişmiş Düzeydeki Genelleme

> "Toplamda 12 olduğu için eşkenar üçgen olma olasılığından yola çıkarak C(6,2) olabilir. Dik üçgende olabilir, 3-4-5 üçgeni |AC|=3, |CB|=5 olursa C(4,3) olur. |AC|=5, |CB|=3 olursa C(8,5) olur. |AB| uzunluğunun orta noktasını merkez alan bir çember oluşturursak yarıçap 2 olur ve çember üzerindeki her nokta C noktası olabilir." ($Ö_8$)

Öğretmen adaylarının yaklaşık yarısı, değişmezleri araştırma kapsamında üçüncü köşe noktasının belirlenmesinde, hareket fikrini dikkate alarak dinamik düşünmüşlerdir. Bu adayların çoğunluğu da başlangıç düzeyinde kalarak sadece birkaç nokta için üçgen oluşturmuşlardır. Diğer taraftan adayların 6'sı, çevresi 12 birim olan ve tepe noktasının koordinatları, örneğin (4, 3) ile (5,4) arasında olabilen üçgenler olmalı düşüncesi ile noktanın sürekli hareketini dikkate almış, 6 aday ise üçüncü köşe noktası için bir üçgenin oluşumunda alınabilecek en uç noktaları düşünmüştür. Araştırmada öğretmen adayların yarısının ise dinamikliği dikkate almadıkları görülmüştür. Bu adayların genellemeleri incelendiğinde, çoğunluğunun az gelişmiş düzeyde genellemelerde bulundukları da dikkat çekicidir. Bu durum, onların bir noktanın sürekli hareketini zihinlerinde canlandırmada sıkıntı yaşadıklarının bir göstergesidir.

Araştırmada keşif ve yansıtmayı dengeleme bağlamında öğretmen adayları göze çarpan keşif ve göze çarpan amaçlar şeklinde ifade edilen iki yaklaşımda bulunmuşlardır. Göze çarpan keşif kapsamında adaylarının çoğunluğu (32), sezgisel olarak rastgele üçgenler oluşturmuşlardır. On yedi aday ise 3-4-5, eşkenar ya da ikizkenar üçgen gibi üçgenleri dikkate alarak tanıdık stratejileri kullanmışlardır.

Göze çarpan amaçlar kapsamında ise 2 aday, bir durum değerlendirmesi yapmak için bütüncül resme geri dönmüşler ve üçüncü köşe noktası için alabilecekleri noktalar kümesini diğer bir deyişle final durumunu zihinlerinde canlandırarak, bu kümenin eğrisel bir yol izlediğini (çember yayı) keşfetmişlerdir.



Şekil 12.
Göze Çarpan Keşif/Sezgisel Yol ile Çizim Örneği

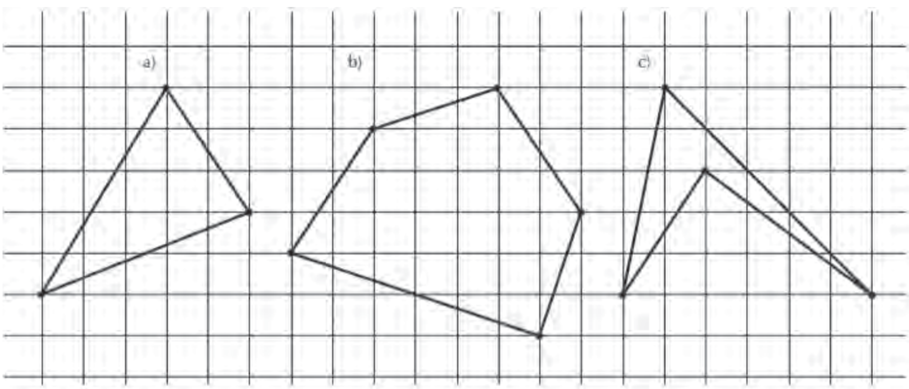
Farklı Yol ile Alan Hesabı Problemi

Öğretmen adaylarına bu problem kapsamında Şekil 13'te sunulan çokgenler verilmiş ve onlardan istedikleri yöntem ile her bir çokgenin alanını hesaplamaları, B çokgeninin alanı hesaplamak için en az üç yöntem tanımlamaları ve bu yöntemler ile diğer çokgenlerin alanının hesaplanıp hesaplanamayacağını tartışmaları istenmiştir.

Bu problem aracılığıyla, ilişkilerle muhakeme bağlamında öğretmen adaylarının geometrik şekiller arasında ve şekillerin kendi yapısı içerisinde alan hesabının anlamından yola çıkarak bir ilişkilendirme yapmaları beklenmiştir.

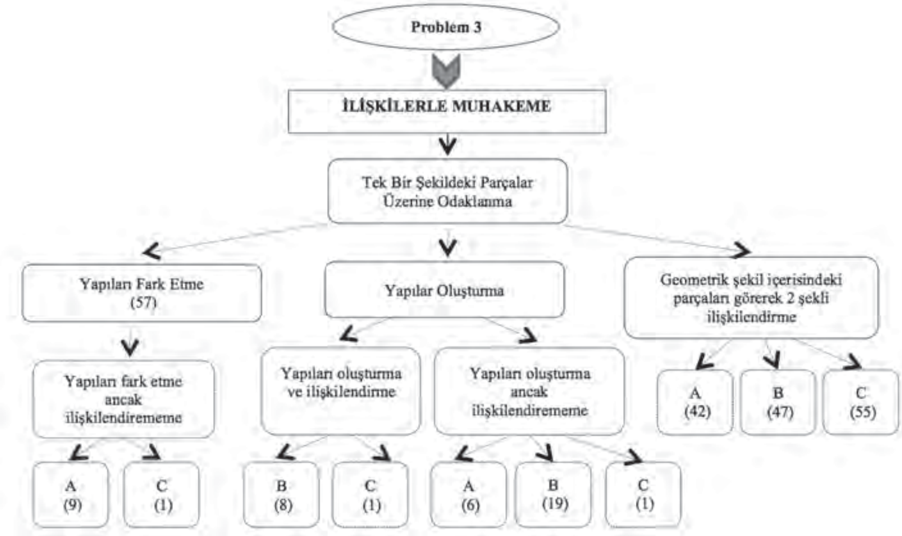
Öğretmen adaylarının tamamı, problemde verilen çokgenler içerisindeki parçalara odaklanarak bir çokgen içerisindeki düzenleri ve yapıları fark etmiştir. Ancak adayların bazıları bu yapıları fark etmelerine karşın özellikle A çokgeninin alanını hesaplamada bu yapıları etkili bir biçimde kullanamamışlardır. Bu adayların 5'i verilen çokgenin kenar uzunluklarını hesaplayarak alanı bulmaya çalışmış, 4'ü ise verilen üçgeninin yüksekliğini belirleyemediği için A çokgeninin alanı hesaplayamamıştır.

Şekil 14'te görüldüğü gibi, öğretmen adaylarının oldukça az bir kısmının (8 aday) B çokgenini uygun biçimde parçalayarak oluşturdukları kare, dikdörtgen ve üçgen gibi geometrik yapıları kullanarak alanı buldukları görülmüştür. Bir adayın ise C çokgenini uygun şekilde parçalayarak önce bir dörtgen ve üçgen elde ettiği, ardından dörtgeni yamuğa tamamlayarak taralı bölgelerin alanını hesaplayabildiği belirlenmiştir. Adayların uygulamaları örnek olarak Şekil 15'te sunulmuştur.

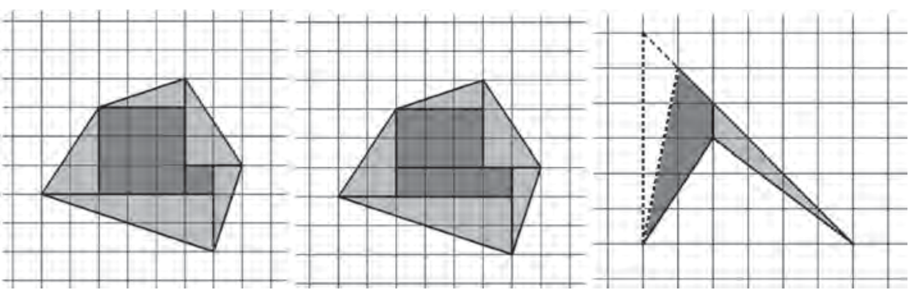


Şekil 13.
Problemde Verilen Çokgenler

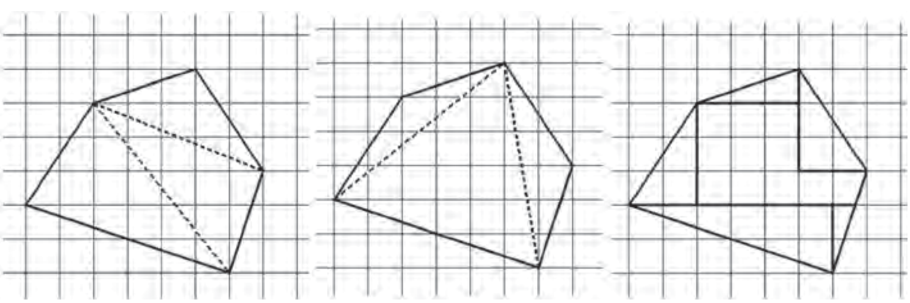
Bunların yanı sıra B çokgeni için 19 aday, alan hesabı için çokgeni Şekil 16'da gösterildiği gibi parçalara ayırmış ancak alan hesaplamaya uygun parçalayamadıkları için sonuca ulaşamamışlardır.



Şekil 14.
Adayların Problemde Gösterdikleri Geometrik Zihinsel Alışkanlıkları

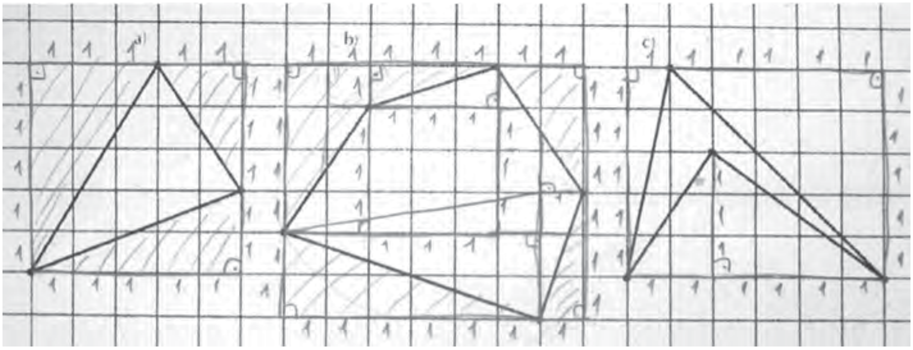


Şekil 15.
Çokgen B ($Ö_{33}$ ve $Ö_{52}$) ve Çokgen C ($Ö_{24}$) için Adayların Yapı Oluşturma Örnekleri



Şekil 16.
Çokgen B ($Ö_{1}$, $Ö_{3}$, $Ö_{32}$) için Adayların Yapı Oluşturma Örnekleri

A ve C çokgenleri ise alan hesabı için yapılar oluşturularak, diğer deyişle parçalanarak, hesaplanması zor çokgenlerdir. Buna karşın A çokgeni için 6, C çokgeni için 1 aday çokgenleri parçalamayı denemiş ancak sonuca ulaşamamışlardır. Öğretmen adaylarının hiçbiri birim kare sayma yoluna gitmemiş, tahmini bir alan hesabında bulunamamıştır. Ayrıca dönüşümlerden yararlanan öğrenci de olmamıştır.

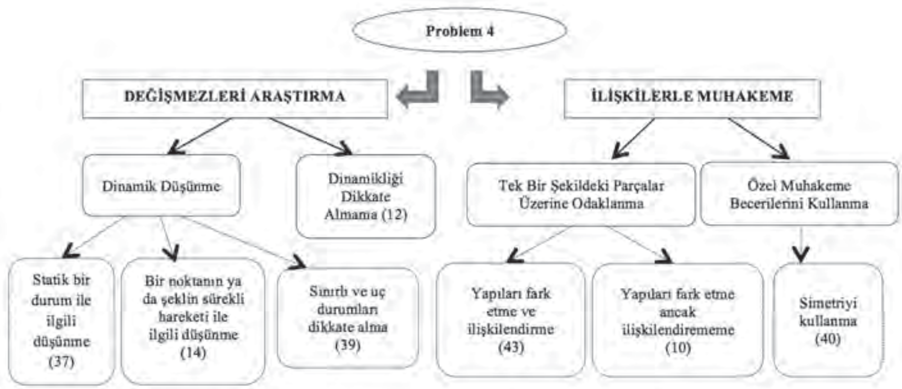


Şekil 17.
Adayın ($Ö_{23}$) Geometrik Şekilleri İlişkilendirmesi

Öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğunun, alan hesabı için verilen çokgeni tanıdık bir çokgene tamamlama yolunu kullandıkları görülmüştür. Ağırlıklı olarak adaylar A üçgenini bir kenar uzunluğu 5 br. olan bir kareye, B çokgenini boyutları 6x7 olan bir dikdörtgene ve C dörtgenini ise bir üçgene ya da boyutları 5x6 olan dikdörtgene tamamlamışlar, ardından tüm alandan çokgenin dışında kalan üçgensel ve dörtgensel bölgelerin alanlarını çıkararak sonuca ulaşmışlardır. Şekil 17'de bir öğretmen adayının çizimi sunulmuştur. Bu adaylardan A çokgeni için 4, B çokgeni için 11 ve C çokgeni için 7 adayın da alan hesabında işlem hatası yaptıkları belirlenmiştir.

Alan Problemi

Öğretmen adaylarına farklı yol ile alan hesabı probleminin devamı niteliğinde "*Alanı 12 birim kare olan bir üçgenin iki köşe noktasının koordinatları (0,4) ve (0,10) olarak verilmiştir. Üçüncü köşe noktasının koordinatı için bütün olasılıkları bulunuz ve nasıl oluşturduğunuzu açıklayınız*." problemi sorulmuştur. Ayrıca üçüncü köşe noktası için koordinatların tamamının nasıl bulunabileceği, oluşturulan üçgenlerden kaç tanesinin dik ve ikizkenar üçgen olduğu, bu üçgenleri veren üçüncü köşe noktasının koordinatlarının belirlenmesi istenmiştir. Bu problemde, ilişkilerle muhakeme bağlamında öğretmen adaylarının istenilen üçgenin üçüncü köşe noktasının $x=4$ ve $x=-4$ doğruları üzerinde olabileceğini fark ederek alan ile ilişkilendirmeleri ve diğer üçgenleri belirlemede simetrik ilişkileri kullanmaları beklenmiştir. Ayrıca değişmezleri araştırma bağlamında, adaylardan üçüncü köşe noktasının koordinatının doğrular üzerinde değiştiğini fark etmeleri, toplamda 4 dik üçgeni ve 10 ikizkenar üçgeni oluşturan noktaların koordinatlarını belirlemeleri de beklenmiştir.

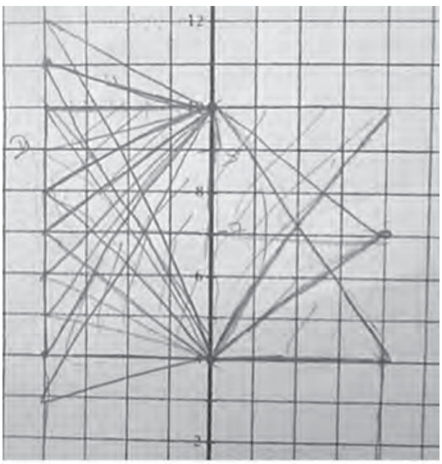


Şekil 18.

Adayların Problemde Gösterdikleri Geometrik Zihinsel Alışkanlıkları

Öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu, ilişkilerle muhakeme kapsamında tek bir şekildeki parçalar üzerine odaklanarak alanı 12 birim kare olan üçgenin üçüncü köşe noktasının koordinatlarını belirlemek için öncelikle üçgenin yüksekliğinin 4 birim olması gerektiğini belirtmişler, ardından bu noktanın *x=4* doğrusu üzerinde olabileceğini düşünmüşlerdir. Ancak bu adaylardan 10'unun yapıyı fark etmelerine karşın alan ile koordinatları ilişkilendiremedikleri de görülmüştür. Adayların büyük bir çoğunluğunun *x=4* doğrusunu belirledikten sonra simetrik ilişkilere dayalı olarak üçüncü köşe noktası için *x=-4* doğrusunu da belirttikleri saptanmıştır. Bir öğretmen adayının ise bu soruda simetrik ilişkilerin kullanılmaması gerektiğini *"Uzunluk negatif olamaz."* ifadesi ile açıklaması oldukça çarpıcıdır.

Değişmezleri araştırma kapsamında, dinamik düşünen 14 adayın, üçgen eşitsizliğini de dikkate alarak üçüncü köşe noktasının *x=4* ve *x=-4* doğruları üzerindeki her noktada olabileceğini belirttikleri ve dolayısıyla sınırsız sayıda üçgen oluşabileceğini ifade ettikleri görülmüştür. Adaylar, üçgenin üçüncü köşe noktasının doğrular üzerindeki sürekli hareketini Şekil 19'daki gibi örneklendirmişlerdir.



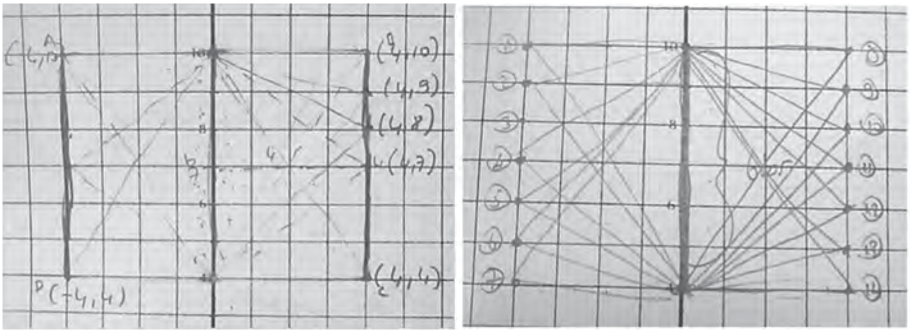
Şekil 19.

Öğretmen Adayının ($Ö_{29}$) Alanı 12 br² olan Üçgenleri Göstermesi

Bazı öğretmen adaylarının (37 aday) ise alanı 12 birim kare olan birden fazla üçgen belirlemelerine karşın, üçüncü köşe noktasının hareketini dikkate almayarak daha sınırlı düşündükleri görülmüştür. Bu adaylar içerisinde üçgenin üçüncü köşe noktasının *x=4* ve *x=-4* doğruları üzerinde ancak $4 \leq y \leq 10$ değerleri arasında olduğunu belirtenlere rastlanmıştır. Şekil 20'de öğretmen adaylarının düşüncelerini yansıtan çizimleri örnek olarak sunulmuştur. Bu düşünce doğrultusunda bazı adaylar belirtilen aralıktaki *x=4* ve *x=-4* doğruları üzerindeki tüm noktalarda alanı 12 birim kare olan bir üçgen oluşabileceğini ifade ederken (örnek Şekil 20-I), bazı adaylar koordinatların tamsayı olması gerektiği belirterek üçüncü köşe noktasının koordinatlarının (±4,4), (±4,5), … (±4,10) olduğunu ve toplamda sadece 14 üçgen oluştuğunu (örnek Şekil 20-II) söylemişlerdir.

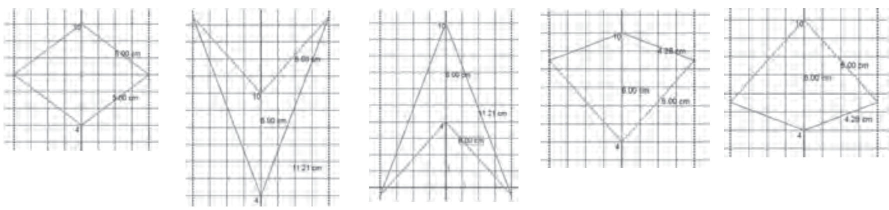
Dinamik düşünme kapsamında sınırlı ve uç durumları dikkate alıp almadıklarını belirlemek amacıyla oluşturulan üçgenlerden kaç tanesinin dik ve ikizkenar üçgen olduğu, öğretmen adaylarına sorulmuştur. Adayların tamamına yakını 4 dik üçgeni belirlemelerine karşın ikizkenar üçgenin 2 tane olduğunu ifade etmişlerdir. Oysaki Şekil 21'de verildiği gibi iki köşesinin koordinatları (0,4) ve (0,10) olarak verilen ve alanı 12 birim kare olan 10 adet ikizkenar üçgen oluşturulabilmektedir. Adayların tamamına yakınının ikizkenar üçgen olarak sadece Şekil 21'deki I ve II üçgenlerini belirleyebildikleri görülmüştür. Ayrıca bazı adayların 4 dik üçgenin yanı sıra Şekil 21-I ve II üçgenlerinin de dik olabileceğini belirttikleri saptanmıştır. Bu adayların çapı gören çevre açının dik açı olması bilgisinden yola çıktıkları, ancak (0,4), (4,7), (0,10), (-4,7) noktalarından bir çember geçip geçemeyeceğini düşünemedikleri görülmüştür. Adayların Şekil 21'de verilen ikizkenar üçgenlerin tamamını görebilmeleri, iyi bir geometrik bakış açısına sahip olduklarının da bir göstergesi sayılabilir. Verilen soruda adayların sadece 2 ikizkenar üçgeni belirleyebilmeleri onların bu bakış açılarının zayıf olduğunun bir göstergesidir. Dört öğretmen adayı ise bu soruyu yanıtlayamamıştır.

Sonuç olarak dört problem dikkate alındığında, adayların ayrık şekiller ya da bir şeklin parçaları ve bütünü arasında, alan ve çevre gibi kavramlar arasında ilişki aramada ve muhakeme yapmada genel olarak zayıf kaldıkları ve buna bağlı olarak da daha çok az gelişmiş düzeyde genelleme yapabildikleri görülmüştür. Bu durumun en önemli nedenleri arasında adayların zihnin geometrik alışkanlıklarının son bileşeni olan keşif ve yansıtmayı dengeleme, diğer bir deyişle, yansıtıcı düşünme becerilerinin yeterli düzeyde olmaması gösterilebilir. Oysaki bu son bileşen geometrik bir problemin tekrar ve tekrar gözden geçirilmesini ve değerlendirilmesini gerektirmektedir. Adayların büyük bir çoğunluğunun böylesi bir davranışı sergilemediği saptanmıştır.



I (Ö$_{56}$) **II** (Ö$_{25}$)

Şekil 20.
Öğretmen Adaylarının Çizimi



I-II III-IV V-VI VII-VIII IX-X

Şekil 21.
Problemde Adaylardan İstenen İkizkenar Üçgenler

Tartışma ve Sonuç

Adayların; geometrik zihinsel alışkanlıklar çatısı altında, verilen problemlere ilişkin muhakeme, keşfetme ve değişmezleri araştırma bağlamında çoklu düşünme yollarına sahip olmadıkları ve istenilen düzeyde genelleme yapamadıkları, çoğunluğunun ise az gelişmiş düzeyde genellemede yer aldıkları saptanmıştır. Araştırmadan elde edilen bulgular Driscoll ve arkadaşları (2007) ile Koç ve Bozkurt'un (2012), öğrenciler ve matematik öğretmen adayları üzerinde elde ettikleri sonuçlar ile paralellik göstermektedir.

Araştırmanın sonuçları ilişkilerle muhakeme bağlamında ele alındığında, öğretmen adaylarının çoğunluğunun verilen problemde yer alan tek bir geometrik şekil içerisindeki düzenleri-yapıları fark ettikleri ve bunları kendi içinde ilişkilendirdikleri, ancak geometrik bir şekil içerisinde uygun bir yapı (örneğin otlak probleminde geometrik yapıyı değiştirerek alanı hesaplama) oluşturamadıkları görülmüştür. Buna karşın birden fazla geometrik şekil içeren bir problem verildiğinde ise, adayların çoğunluğunun şekiller arası karşılaştırma yoluna gitmek yerine her bir şekli diğerlerinden bağımsız olarak analiz ettikleri, dolayısıyla tek düze ve formüle dayalı düşündükleri görülmüştür. Bu adayların daha önceki öğrenim yaşantılarında genel sınavlara hazırlık olarak çoktan seçmeli testlere tabi tutulmaları ve daha çok hızlı hesaplama gerektiren formüllere ve işlemlere odaklanmaları bu durumun bir kaynağı olabilir. Oysaki adayların çoklu çözüm yollarını düşünebilmeleri geometrik zihinsel alışkanlıkların kazanımında ve başarılı birer geometrik problem çözücü olabilmelerinde esastır. Ne yazık ki çok az sayıda adayın geometrik yapıları karşılaştırma yoluna gitmesi düşündürücüdür. Az sayıda da olsa, bu adayların özellikle alan hesaplamasında birim kareler üzerinden muhakemede bulunmaları, bu adayların alan ölçümünün sadece formüle dayalı bir ürün olmadığının (Driscoll ve ark., 2007) farkında olduklarının bir göstergesidir. Bu durumun aslında pek çok nedeni olabilir. Klinik görüşmeler ile daha derinlemesine bir çalışma yapılarak bu nedenler ortaya çıkarılabilir. Öte yandan, ilişkilerle muhakeme bağlamında adayların simetri ve orantısal akıl yürütme gibi özel muhakeme becerilerini istenilen düzeyde gerçekleştiremedikleri de ulaşılan bir diğer sonuçtur. Bu sonuç Akkuş Çıkla ve Duatepe'nin (2002) öğretmen adaylarının orantılı durumlar hakkında niceliksel akıl yürütürken kesin ve doğru bir dil kullanma davranışlarını gösterememeleri, orantısal akıl yürütmenin temelindeki kavramsal bilgilere sahip olmadıkları sonucu ile paralellik göstermektedir.

Geometrik fikirleri genelleme bağlamında ise öğretmen adayların tamamına yakınının verilen problemlerin tüm çözüm kümelerini görmede, bir geometrik şekil sınıfı için doğru olan bir kuralı belirlemede, kuralları ya da problem durumlarını bütün ile ilişkilendirmede eksiklikleri olduğu, dolayısıyla gelişmiş düzeyde bir genelleme yapamadıkları görülmüştür. Diğer bir deyişle adaylarının çoğunluğunun verilen bir problemde özel durumlara ya da örneklere dayalı çıkarımlarda bulundukları ve az gelişmiş genelleme düzeyinde oldukları belirlenmiştir. Bu durumun öğretmen adaylarının çevre ve alan hesaplamalarındaki konu alan bilgilerinden kaynaklandığı söylenebilir. Nitekim sınıf öğretmeni adayları ile geometrik şekillerin çevre ve alan hesaplamaları üzerine gerçekleştirilen bazı çalışmaların sonuçlarında (Menon, 1998; Reinke, 1997) adayların yanlış yöntemler ve stratejiler kullandıkları, kavramsal ve ilişkisel anlamadan ziyade problemlere işlemsel yaklaştıkları görülmektedir. Bu çalışmadaki adayların da alan ve çevre hesaplamalarında daha çok formüle dayalı muhakemede bulunmaları ve gelişmiş bir düzeyde genellemede bulunamamaları yapılan araştırma sonuçları ile örtüşmektedir. Ayrıca bir önceki paragrafta da ifade edildiği gibi adayların geometrik problemlere ilişkin keşfetme, ilişki arama ve muhakeme yapmada zayıf kalmaları genelleme yapamamalarının diğer bir nedeni de olabilir. Çünkü genelleme yapabilme; soyutlama, bütüncül düşünme, muhakeme yapabilme, görselleştirme gibi üst düzey bilişsel bir beceridir (Greenes, 1981; Sriraman 2003; Sternberg, 1979'dan akt., Amit ve Neria, 2008).

Değişmezleri araştırma bağlamında değişmez yani statik bir durumla ilgili öteleme, dönme, yansıma, genişletme, açımlama ve birleştirme gibi dinamik eylemler sonucunda hangi özelliklerin değişmez kaldığı, hangi özelliklerin değiştiği önemlidir. Temel bir düzeyde geometrik zihinsel alışkanlığın bir göstergesi problem çözücünün problemdeki yapılara ilişkin bir geometrik dönüşümü denemeye karar verdiği, değişen ve değişmeyen özellikleri dikkate aldığı zaman ortaya çıkar (Driscoll ve ark., 2007). Araştırmada ise, verilen problemlerde adayların yaklaşık yarısının statik bir durumda kesme, parçalama, yansıma, öteleme ve döndürme gibi eylemlere dayalı olarak dinamikliği denedikleri, ancak adayların tamamına yakınının iyi bir zihinsel alışkanlığa sahip olmanın bir göstergesi olan dönüşümler altında bir noktanın ya da şeklin sürekli hareketini göz önüne almadıkları, diğer bir deyişle, dinamik düşünemedikleri saptanmıştır. Örneğin, alanı 12 birim kare olan üçgenin üçüncü köşe noktasının koordinatlarının belirlenmesinin istendiği problemde, Driscoll ve arkadaşlarının (2007) çalışmalarında da ortaya koyulduğu gibi, bazı öğretmen adaylarının üçüncü köşe noktasının koordinatları için belli aralıklarda ya da sadece tam sayı olacak biçiminde sınırlı noktalar belirledikleri görülmüştür. Dinamik düşünme aslında en etkili dinamik geometri programları aracılığıyla kazandırılabilir. Bu programların Türkiye'de yeni yeni kullanılmaya başlanması bu sonucu doğurmuş olabilir. Buna karşın az sayıda adayın köşe noktasının $x=4$ ve $x=-4$ doğruları üzerindeki her noktada olabileceğini belirttikleri ve dolayısıyla sınırsız sayıda üçgen oluşabileceğini ifade ettikleri de belirlenmiştir. "Süreklilik ile muhakeme" (Goldenberg ve ark., 1998) olarak adlandırılan bu düşünme biçimi, güçlü matematiksel düşünme yollarından biri olup geometrik zihinsel alışkanlığın değişmezleri araştırma bileşenini ortaya çıkaran temel bir göstergedir.

Keşif ve yansıtmayı dengeleme bileşeni sadece çevre probleminde belirgin olarak ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu istenilen üçgen için sezgisel olarak rastgele üçgenler oluşturmuşlar ve eşkenar üçgen, 3-4-5 üçgeni gibi üçgenlerden yola çıkarak tanıdık stratejileri denemişlerdir. Ne yazık ki sadece 2 öğretmen adayı anlık düşünme ve denemelerin dışına çıkarak geometrideki zihinsel alışkanlığın göstergelerinden biri olan bütün resme geri dönme ve final durumunu gözünde canlandırma gibi bütüncül düşünmüşlerdir. Benzer şekilde Koç ve Bozkurt'un (2012) çalışmasında da keşif ve yansıtmayı dengeleme bileşenin öğretmen adaylarının en az kullandıkları alışkanlık olduğu belirlenmiştir. Yanı sıra Işık ve Kar'ın (2012) sınıf öğretmeni adaylarının yarı yapılandırılmış durumlar üzerinde problem kurma becerilerini incelendikleri çalışmalarında ise, adayların istenilen duruma yönelik az sayıda farklı problem kurabildikleri, kurulan problemlerin de ağırlıklı olarak basit hesaplamalar ile çözülebilecek türde olduğu ve sınırlı sayıda farklı matematiksel kavramları ilişkilendirdikleri görülmüştür. Keşif ve yansıtma bir problem durumunda çözüm için çeşitli yollar deneme ve her durumda değerlendirme yapma, çeşitli matematiksel kavramların açıklamalarını ve savunmalarını gerektiren problemler kurma sonucunda belirginleşir. Adayların bu yönde eğilimlerinin ve çabalarının olmaması ya da bu yönde bir alışkanlığa sahip olmamaları onların bütüncül düşünememelerine neden olmuş olabilir.

Sınıf öğretmeni adaylarının çevre ve alan problemlerindeki geometrik düşünme yollarını ortaya koyan bu çalışma sonucunda; adayların geometrik zihinsel alışkanlıkların göstergeleri olan bileşenler bağlamında farklı düşünme yollarına sahip olmadıkları, problemleri uygun biçimde analiz edemedikleri, akla ilk gelen fikre dayalı olarak davrandıkları, ancak bu eylemlerini bütüne taşıyamadıkları dolayısıyla geometrik zihinsel alışkanlıklarının istenilen düzeyde olmadığı görülmüştür. Elbette zihnin geometri alışkanlıklarının gelişimi sadece lisans eğitimi ile sınırlandırılamaz, adayların geçmiş öğrenim yaşantılarının da bu sonucu doğurmasında önemli bir rolü olabilir. Geometrideki zihinsel alışkanlıkların gelişimi için düzenli problem çözme çalışmalarına ve sınıf tartışmalarına gereksinim vardır. Nitekim Özen ve Köse'nin (2013) matematik öğretmeleri üzerine gerçekleştirdikleri çalışmalarında da görüldüğü gibi, zihnin geometrik alışkanlıklarına dayalı bir öğretim ile öğretmenlerin giderek daha güçlü geometrik ilişkiler kurdukları ve geometrik düşünmelerinin geliştiği görülmüştür. Bu bağlamda sınırlı sayıda matematik alan ve öğretim derslerine sahip sınıf öğretmenliği programında bu derslerde en azından geometri kapsamında zihinsel alışkanlıkların kazanımına yönelik etkinliklere yer verilmesi önerilebilir. Geometrik zihinsel alışkanlıklar çatısı altında verilen ilişkilerle muhakeme, geometrik fikirleri genelleme, değişmezleri araştırma, keşif ve yansıtmayı dengeleme bileşenleri çeşitli geometrik problemler aracılığıyla geliştirilir. Bu bileşenleri besleyen düşüncelerin gelişimi ise geometrik düşünmenin gelişiminde anahtar bir rol oynar. Bu bağlamda öğretmenler öğrencilerinin geometrik düşünmelerini geliştirmek amacıyla onları yönlendirmeli, uygun sorular sorarak düşüncelerini ve düşünce yollarını ortaya çıkarmalı, süreçte karşılaşabilecekleri zorlukları ve güçlükleri anlatmalıdırlar. Kısacası öğretmenler öğrencilerine geometrik bir probleme ilişkin çoklu düşünme yollarını öğretmeli ve bu durumu alışkanlık h**â**line getirebilmelerini sağlamalıdırlar.

Araştırmada ulaşılan sonuçların nedenlerinin detaylı olarak daha derinlemesine açıklanabilmesi için gözlem, klinik görüşme ve hatta öğretim deneyi gibi çeşitli yöntem ve desenler kullanılarak öğretmen adayları, matematik ve sınıf öğretmenleri üzerine çalışmalar gerçekleştirilebilir.

Educational Sciences: Theory & Practice • 14(3) • 1220-1229

www.edam.com.tr/estp
DOI: 10.12738/estp.2014.3.1864

Primary School Teacher Candidates' Geometric Habits of Mind*

Nilüfer Y. KÖSE[a]
Anadolu University

Dilek TANIŞLI[b]
Anadolu University

Abstract

Geometric habits of mind are productive ways of thinking that support learning and using geometric concepts. Identifying primary school teacher candidates' geometric habits of mind is important as they affect the development of their future students' geometric thinking. Therefore, this study attempts to determine primary school teachers' geometric habits of mind. Participants were 57 primary school teacher candidates in their third year studying Primary School Education in a Faculty of Education at a state university in Turkey. The data were collected through four open-ended geometry problems on concepts of perimeter and area. The collected data were then analyzed based on the theoretical framework of the components of geometric habits of mind and in accordance with the stages of descriptive analysis. The results showed that the primary school teacher candidates did not possess different ways of thinking about the components indicating geometric habits of mind. The study also found that the candidates could not analyze the given problems appropriately and acted on the first idea they came up with, but they were unable to apply these actions on the problem and, therefore, their geometric habits of mind were not at the desired level.

Key Words

Geometric Habits of Mind, Mathematics Education, Perimeter and Area, Teacher Training.

Habits of mind are intellectual problem-solving skills necessary to promote reasoning, perseverance, creativity, and craftsmanship. Leikin (2007) suggested that "employing habits of mind means inclination and ability to choose effective patterns of intellectual behavior" (p. 2333). Cuoco, Goldenberg, and Mark (1996) identified two classes of habits of mind: general habits of mind that surpass every discipline and content-specific habits of mind specific to the discipline of mathematics. General habits of mind include basic qualities such as recognizing figures, exploring, describing, discovering, visualizing, conjecturing, and guessing. In contrast, mathematical habits of mind involve continuous reasoning, performing thinking experiments in extraordinary situations, and employing abstraction used by mathematicians in their work (Mark, Cuoco, Goldenberg, & Sword, 2009).

The main characteristics of mathematical habits of mind develop according to levels of learning (Cuoco, Goldenberg, & Mark, 2010; Goldenberg, Shteingold, & Feurzeig, 2003; Levasseur & Cuoco, 2003). In fact, the term "habits of mind"

* This study was presented at the 11th National Elementary Teacher Education Symposium, Rize, Turkey, 24–26 May 2012.

a **Nilüfer YAVUZSOY KÖSE, Ph.D.**, is currently an associate professor of Mathematics Education. Her research interests include teacher education, geometric and algebraic thinking, professional development of teachers and qualitative research designs. *Correspondence:* Anadolu University, Faculty of Education, Department of Elementary Education, Eskişehir, Turkey. Email: nyavuzsoy@anadolu.edu.tr

b Dilek TANIŞLI, Ph.D., is currently an associate professor of Mathematics Education. Contact: Anadolu University, Faculty of Education, Department of Elementary Education, Eskişehir, Turkey. Email: dtanisli@anadolu.edu.tr

involves two major characteristics: "thinking" and "habituation." Harel (2007, 2008) explained the thinking dimension with ways of thinking and regarded habits of mind as internalized ways of thinking. Goldenberg (2009) described the habituation dimension as habits that "one acquires so well, makes so natural, and incorporates so fully into one's repertoire, that they become mental habits—one not only can draw upon them easily, but one is likely to do so" (p. 13). Mason and Spence (1999) explained the habituation character with their notion of "knowing-to act in the moment," while Lim (2008) explained it with the notion of "spontaneous anticipation" developing when a student instantly anticipates and performs an action in a problem case based on the first idea that comes to mind. Lim also regarded a habit of mind as a cognitive tendency to mentally act in a certain way in certain situations. By the habituation character, Lim (2009) referred to the tendency of "doing whatever first comes to mind" or "diving into the first approach that comes to mind" (Watson & Mason, 2007, p. 207). Mathematical habits of mind come to the fore in areas of mathematics such as geometry and algebra, and they are defined as geometric or algebraic habits of mind (Driscoll, 1999; Mark et al., 2009). A geometric habit of mind is a productive way of thinking that promotes learning and practicing geometry. This way of thinking involves exploring geometric relationships and reasoning with these relationships, generalizing geometric ideas, investigating variants and invariants in these relationships, and assessing a geometric figure with all these components (Driscoll, DiMatteo, Nikula, & Egan, 2007). In their study, conducted between 2004 and 2008, to explore how teachers can define productive ways of geometric thinking to foster it among students in grades 5–10, Driscoll et al. (2007) defined the ways of thinking needed by both teachers and students for becoming successful geometric problem solvers, presented the analyzes of the proofs of geometric thinking, and promoted four fundamental geometric habits of mind: reasoning with relationships, generalizing geometric ideas, investigating invariants, and balancing exploration and reflection. However, in Turkey, there have been only two studies conducted on this subject. Koç and Bozkurt (2012) conducted one on mathematics teacher candidates' knowledge about the volume of the cylinder, and Özen and Köse (2013) conducted a lesson study with mathematics teachers about geometric objects. Other similar studies in Turkey are mostly about van Hiele levels of geometric thinking. In their study, Koç and Bozkurt asked 172 mathematics teacher candidates in their first year to compare the volumes of two different cylinders that can be made with a rectangular (but non-square) paper and to identify and explain the geometric habits of mind that they used during the process. Approximately half the candidates generated incorrect comparisons of the two cylinders' volumes, and nearly half who provided correct answers were unable to provide any mathematical explanations to support their answers. In Özen and Köse's study, several sessions of lesson study were conducted with three mathematics teachers for eight weeks. During these sessions, the teachers developed, implemented, and assessed lesson plans about some subjects covered in the secondary school mathematics curriculum such as constructing geometric objects, identifying the basic components of geometric objects, and obtaining area and volume formulas. Özen and Köse found that the teachers benefited from each other's ways of geometric thinking during the planning, implementation, and assessment stages of the lesson study; they established increasingly stronger geometric relations and their geometric thinking improved. Few international and national studies have treated this subject, and most studies currently focus on mathematics teachers or mathematics teacher candidates.

Fostering students' geometric habits of mind is likely to promote academic achievement not only in geometry, but also in other mathematics courses. In fact, Cuoco (2008) argued that all habits of mind are an important part and an organizing principle of a mathematics curriculum. Moreover, it is essential that teachers help students internalize these habits. In fact, teachers must work on geometry problems with their students, help them express their ways of thinking, and provide learning experiences that will contribute to the development of their geometric thinking. Teachers can provide such learning environments through their own habits of mind, which are closely related to teacher training programs. Identifying the geometric habits of mind of primary school teacher candidates, who are supposed to provide students with a strong mathematical foundation, is extremely important because teacher candidates' geometric habits of mind inevitably affect their future students' habits of mind. In other words, this study is important because students' early acquisition of geometric habits of mind is likely to affect their future learning experiences.

Aim of the Study

This study aimed to determine primary school teacher candidates' geometric habits of mind about the concepts of perimeter and area.

Method

Participants

The study participants were 57 teacher candidates in their third year studying primary school education in a faculty of education at a state university in Turkey. This study used criterion sampling, a purposive sampling process that selects cases to satisfy a specific criterion (Yıldırım & Şimşek, 2003). The criterion here required the candidates to be in their third year in the department.

The data were collected using a test comprising four open-ended questions. Limited to the calculation of perimeter and area of geometric figures, the test questions were chosen from the problems about geometric measurement used by Driscoll et al. (2007) in their project on fostering geometric thinking among students in grades 5–10.

The data collected through the open-ended test were analyzed according to descriptive analysis stages, in line with components of the theoretical framework of geometric habits of mind. During the first phase of data analysis, the components developed by Driscoll et al. (2007) for each geometric habit of mind were taken as themes, and the indicators of each component were taken as sub-themes and sub-categories. First, the researcher and an expert in mathematics education each independently conducted the coding process. Then, by comparing their analyses, agreement and disagreement about the items were determined. After that, the themes and sub-themes were tested to ensure the reliability of the analysis results. The coding scheme was tested with Miles and Huberman's (1994) inter-coder reliability formula, which is the number of agreements between two independent coders divided by the number of possible agreements.

For explaining the cause–effect relationships in the results, the relationships between the themes and sub-themes were first illustrated through figures and were presented with direct quotations from the candidates' responses, with the teacher candidates' real names replaced by pseudonyms.

Results

This study aimed to determine primary school teacher candidates' geometric habits of mind; its results are presented below, separately for each of the four open-ended problems on the test taken by the candidates.

Pastures Problem

The teacher candidates were given a problem on finding the area and the amount of fencing required for a pasture's perimeter. As Figure 1 shows, for the reasoning with relationships component, the teacher candidates employed three ways of thinking: focusing on multiple figures, focusing on the pieces in a single figure, and using special reasoning skills.

The study found that seven teacher candidates who focused on multiple figures found the common properties, i.e., the circumference-diameter relationship, and compared the pastures.

Only one candidate expressed the circumference-diameter relationship and engaged in formula-oriented thinking while reasoning about the area, although this candidate actually focused on multiple figures. In contrast, the other six candidates considered the congruent and similar figures between the pastures while reasoning about both the circumference and the area relationships between the pastures. For example, a drawing made by one of the teacher candidates is given below.

Regarding reasoning with relationships, the majority of candidates focused on a single figure's parts and calculated the perimeter and area of each pasture separately, using formulas. However, they failed to perform a sufficient level of reasoning, particularly about the circumference-diameter relationship among all the pastures, but their thinking was based on operations and formulas. Some candidates formed new geometric figures by completing half circles and circles, and some established connections among the parts in these figures. Especially for the questions about calculating the area of a given pasture, the candidates calculated by making the semicircles into full circles. For questions about the amount of fencing required, they expressed the relationship between the fragments in a pasture via partial comparisons with the other pastures.

Additionally, seven candidates, who related the two figures according to the parts, used special skills by reasoning proportionally and using symmetry. While calculating the amount of fencing required for Pasture E, one candidate who used special

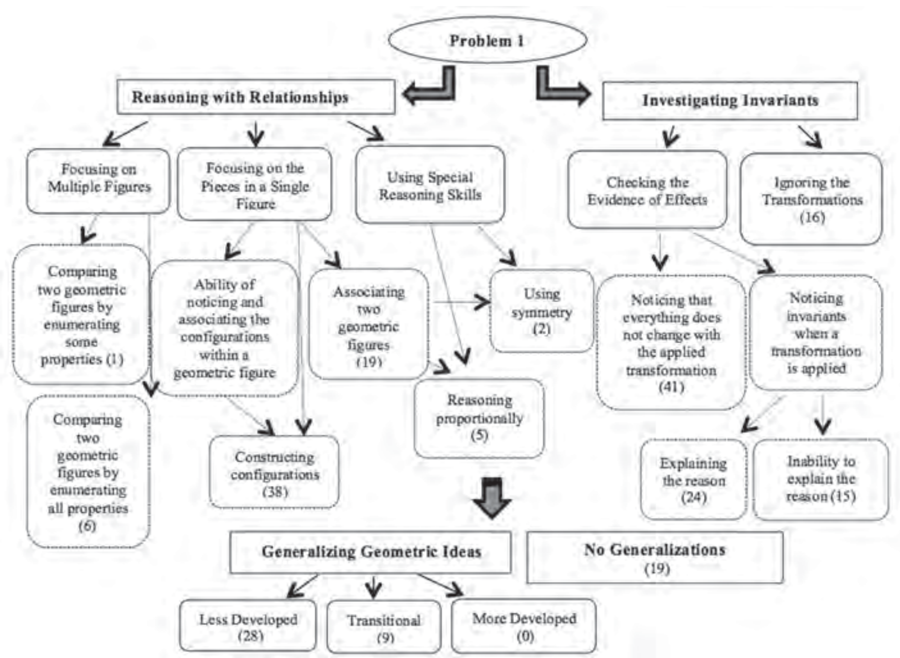


Figure 1.
The Geometric Habits of Mind Demonstrated by the Candidates for the Pasture Problem

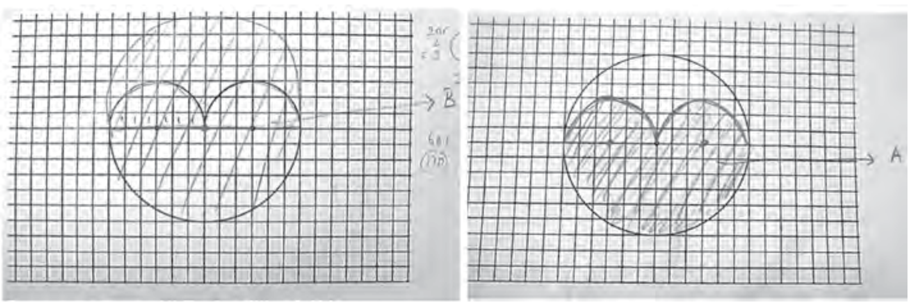


Figure 2.
A Drawing by a Teacher Candidate (T_{16})

reasoning skills created a geometric figure by using symmetry according to the line, established connections between the geometric parts in these figures, and stated that their perimeters were equal to those in the other pastures by saying, "*I drew the symmetry of the upper half of the circle with O_3 center on the lower side. I mean, in this way, Pastures A, B, C, D, and E were equal to each other.*" On the other hand, 28 candidates generalized by considering only special cases, but 19 candidates did not generalize at all. Moreover, only nine candidates at the transitional level of generalization verbally expressed the relationship between the diameters.

Another component of this problem, discussed in terms of reasoning with relationships and generalizing geometric ideas, was investigating invariants. In the latter part, the candidates investigated the area of Pasture E using two different methods. The majority of candidates (41) used rotation, a geometric transformation, in their calculations, but none used a geometric expression such as "rotational transformation," and only 24 candidates explained why the areas did not change during this transformation. Conversely, 16 candidates did not consider any transformation in their calculations, but they either preferred to complete the whole or to make separate calculations. In addition, only one candidate thought of symmetry according to the line while calculating the perimeter of Pasture E, and again, only one candidate recognized that Pasture E and Pasture B had similar figures.

Perimeter Problem

The candidates worked on solving the following problem: "*Two vertices of a triangle with a perimeter of 12 units are located at (4, 0) and (8, 0). What are all the possible positions for the third vertex? How do you know that you have them all?*" As Figure 3 illustrates, this problem emphasizes each component of geometric habits of mind. For reasoning with relationships and generalizing, nine candidates did not generalize at all, but 19 candidates were at the less developed level, 10 were at the transitional level, and 2 were at the more developed level of generalization. Finally, 17 candidates did not attempt to solve this problem.

Candidates at the less developed level of generalization (19) constructed only special triangles, for instance, a 3-4-5 triangle with a base of 4 units or an isosceles triangle. The candidates at the transitional level of generalization (10) recognized that the sum of the lengths of the two sides must add up to 8 and that the difference between the two sides must be less than 4; they constructed triangles based on triangle inequality by assigning several values to determine whether a triangle could be generated in a range. Nonetheless, few candidates at the more developed level of generalization (2) took triangle inequality into consideration and determined the set of possible points as a circle. These candidates generated a more developed example of generalization, but their generalization was still faulty. In terms of investigating invariants, nearly half the teacher candidates thought in a dynamic way by considering the idea of movement for finding the position of the third vertex. However, most of these candidates did not go beyond the starting point, constructing a few triangles only for a few points. On the other hand, six candidates thought that the perimeters of these triangles must be 12 units and that their vertices must be located, for example, between (4, 3) and (5, 4), considering the continuous movement of this point. Further, for the third vertex, six other candidates took the limit/extreme points that can be used in a triangle construction. Half the teacher candidates did not take dynamism into consideration and, most of their generalizations were at the less developed level. This result indicates that these candidates had difficulty visualizing the continuous movement of a point. In terms of balancing exploration and reflection, the teacher candidates demonstrated examples of two approaches: exploration in foreground and end goals in foreground. In terms of exploration in foreground, the majority of candidates (32) intuitively constructed random

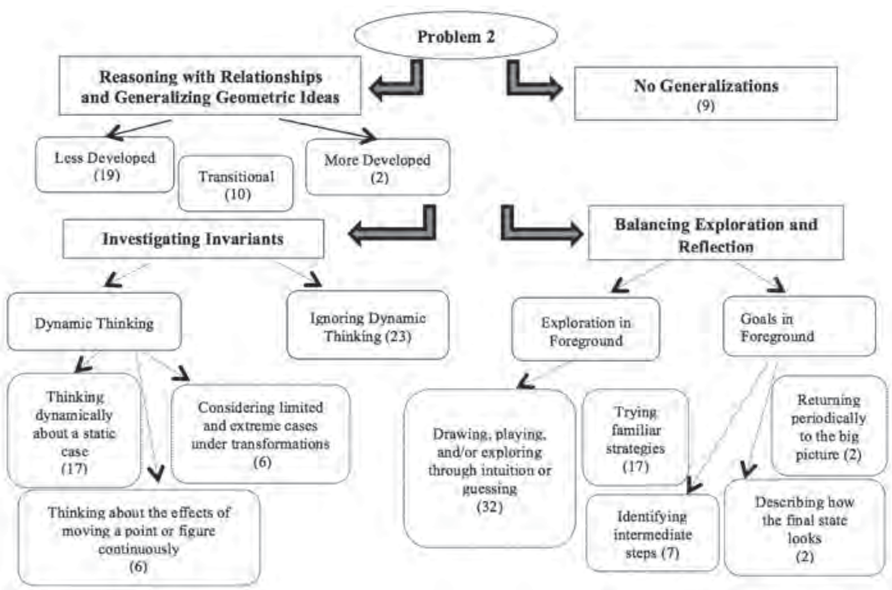


Figure 3.
The Geometric Habits of Mind Demonstrated by the Candidates for the Perimeter Problem

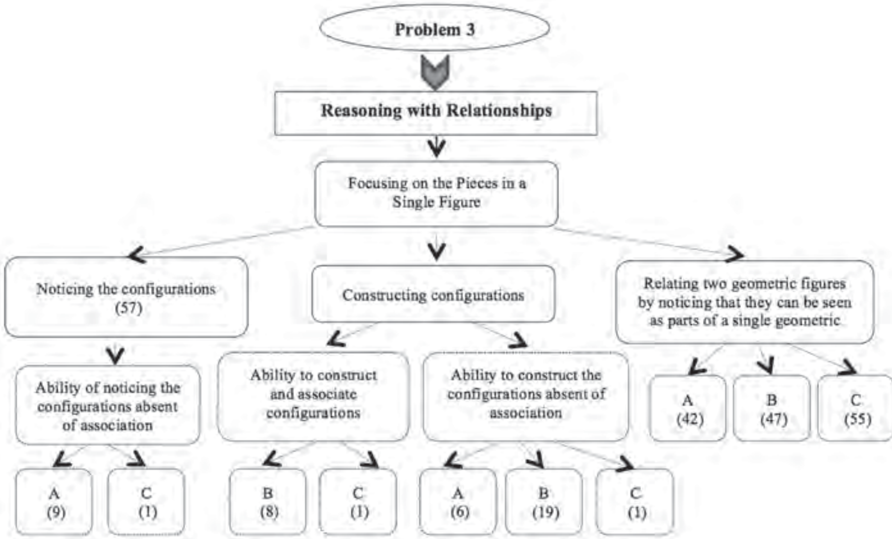


Figure 4.
The Geometric Habits of Mind Demonstrated by the Candidates for the Finding Areas in Different Ways Problem

triangles and 17 candidates used familiar strategies by considering triangles such as 3-4-5, equilateral, or isosceles triangles. In terms of end goals in foreground, two candidates returned to the big picture for a stocktaking, mentally visualized the set of possible points for the third vertex, i.e., the final state, and discovered that this set followed a curvilinear line (arc of circle).

Finding Area in Different Ways Problem

For this problem, the candidates were given three polygons and asked to calculate the area of each in order to develop at least three methods to calculate the area of a given polygon (Polygon B) and to discuss whether it was possible to calculate the areas of the other polygons using the same method.

All the teacher candidates focused on parts given in the problem and recognized the patterns and figures in a polygon. However, some failed to effectively use these figures, especially while calculating the area of Polygon A, although they recognized these figures. Among these candidates, five tried to find the area by calculating the side lengths of the given polygon, and six candidates failed to calculate the area of Polygon A because they were unable to determine the given triangle's height. As Figure 4 illustrates, a few candidates (8) could appropriately dissect Polygon B and find the area by using the geometric shapes that they constructed such as square, rectangle, and triangle. One candidate, however, dissected Polygon C appropriately and obtained a quadrilateral and a triangle, and then calculated the shaded spaces' area by making the quadrilateral into a trapezoid. Figure 5 shows some samples of the candidates' applications.

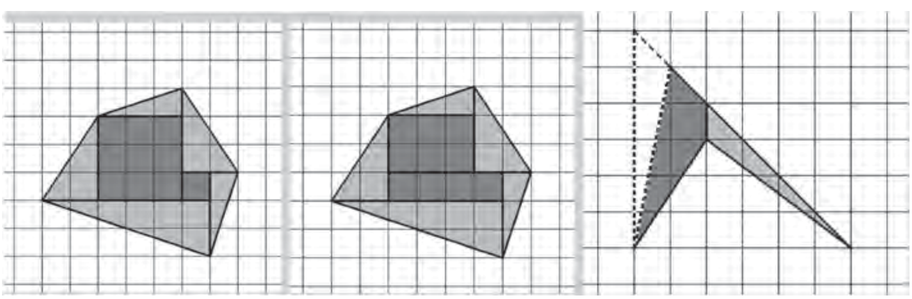


Figure 5.
Samples of the Candidates' Constructions for Polygon B (T_{33} and T_{52}) and Polygon C (T_{24})

In addition, 19 candidates dissected Polygon B for area calculation, but they could not arrive at a conclusion because they failed to dissect it appropriately for calculation. On the other hand, it was difficult to calculate the areas of Polygons A and C by constituting shapes or by dissecting. Nevertheless, six candidates tried to dissect Polygon A, and one candidate tried to dissect Polygon C, but they were unable to arrive at any conclusion. However, the majority of the teacher candidates preferred to make the given polygon into a familiar one for area calculation.

Area Problem

As a continuation of the problem about finding area in different ways, the candidates were asked to solve the following problem: "*Two vertices of a triangle with an area of 12 units² are located at (0, 4) and (0, 10). What are all the possible positions for the coordinates of the third vertex? Explain how you construct them.*" The candidates were also asked to determine the number of the right or isosceles triangles among the constructed triangles and the possible coordinates of the third vertex yielding these triangles.

For reasoning with relationships, the majority of teacher candidates focused on the parts in a single figure and stated that the height of the triangle must be 4 units so that the coordinates of the third vertex of the triangle with an area of 12 units² could be determined, and added that this point could be on $x = 4$ line. However, among these solvers, 10 candidates were unable to relate the area and the coordinates although they recognized the figure. After determining the $x = 4$ line, the majority of candidates also indicated the $x = -4$ line for the third vertex based on the symmetric relationships. On the other hand, one candidate suggested that symmetric relationships should not be used for this question and explained that "*the length cannot be negative*." For investigating invariants, 14 candidates thinking in a dynamic way considered triangle inequality, stated that the third vertex could be on every point on $x = 4$ and $x = -4$ lines and, therefore, there could be an infinite number of triangles. However, some candidates (37) did not consider the movement of the third vertex and thought in a more limited way, although they found more than one triangle with an area of 12 units². Among these solvers, some candidates stated that the triangle's third vertex could be on $x = 4$ and $x = -4$ lines, but it could take values of $4 \leq y \leq 10$. The teacher candidates were asked to determine the number of right and isosceles triangles among those constructed to determine whether they considered limited and extreme cases through dynamic thinking. Although nearly all the candidates found the four right triangles, they stated that there were just two isosceles triangles. However, it was possible to construct 10 isosceles triangles with two vertices on coordinates (0, 4) and (0,10) with an area of 12 units.

Conclusion and Discussion

Concerning the geometric habits of mind framework, the study found that the teacher candidates did not possess multiple ways of thinking, and they could not make generalizations at the desired level, but the majority could make generalizations at the less developed level. These results are comparable to those reported by Driscoll et al. (2007) and Koç and Bozkurt

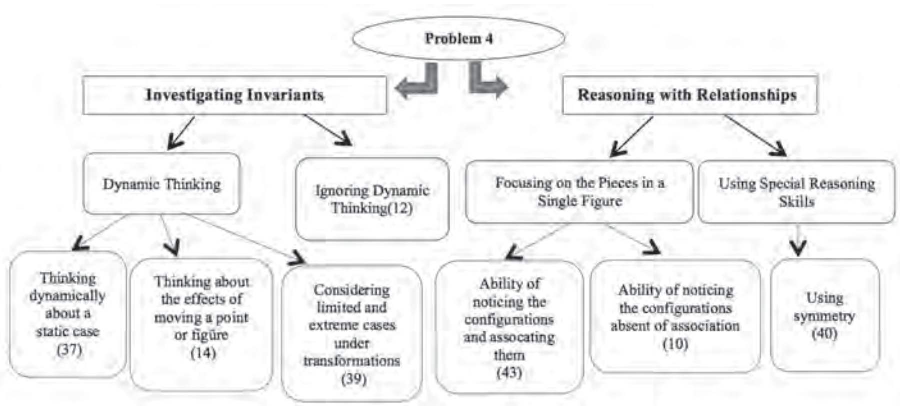


Figure 6.
The Geometric Habits of Mind Demonstrated by the Candidates for the Problem

(2012) in their studies on students and teacher candidates. Furthermore, regarding reasoning with relationships, the study found that the majority of teacher candidates recognized the patterns–figures in a single figure in the given problems and related them to each other, but they failed to construct an appropriate geometric figure. In contrast, when presented a problem of more than one geometric figure, the majority of the candidates analyzed each figure independently instead of comparing the figures and, therefore, thought in a uniform and formula-oriented way. However, it is essential that candidates think of multiple solutions so that they can acquire geometric habits of mind and become successful problem solvers. Unfortunately, few of these teacher candidates compared the geometric figures. The fact that few candidates engaged in reasoning based on unit squares especially for area calculation indicates that these candidates were aware that area measure is not a product based solely on formula (Driscoll et al., 2007). The study also found that, with respect to reasoning with relationships, the candidates failed to perform special reasoning skills, such as symmetry and reasoning proportionally, at the desired level. This result is similar to that of Akkuş Çıkla and Duatepe (2002), who found that teacher candidates failed to use clear, appropriate language while reasoning quantitatively about proportional cases and that they did not possess the conceptual knowledge underlying proportional reasoning. In addition, with respect to generalizing geometric ideas, the study found that nearly all the teacher candidates needed improvement in recognizing all solution sets of the given problems, determining a correct rule for a category of geometric figures, and generalizing rules and problem cases with the whole; therefore, they were unable to make generalizations at the more developed level. This situation could be attributed to the teacher candidates' knowledge of perimeter and area calculations. In fact, some studies (Menon, 1998; Reinke, 1997) conducted with primary school teacher candidates on perimeter and area calculations of geometric figures found that the candidates used inappropriate methods and strategies and approached the given problems operationally, rather than achieving conceptual and relational comprehension. Similarly, this study's candidates tended to engage in formula-oriented reasoning in area and perimeter calculations and failed to make generalizations at the more developed level. As mentioned previously, teacher candidates' need for improvement in exploring, seeking relationships, and reasoning about geometric problems could be another reason that they could not generalize at the desired level—a higher-order skill such as abstraction, holistic thinking, reasoning, and visualization (Greenes, 1981; Sriraman, 2003; Sternberg, 1979 as cited in Amit & Neria, 2008).

Which properties remain invariant and which vary is important in terms of investigating invariants. Driscoll et al. (2007) suggested that a solver's decision to try a transformation of figures in a problem and consideration of the changing and invariant attributes indicate a basic-level geometric habit of mind. This study found that nearly half the candidates tried dynamism in a static case based on actions such as dissection, reflection, translation, and rotation, but almost all the candidates did not consider continuous movement of a point or figure undergoing transformations; in other words, they failed to think in a dynamic way. For example, as Driscoll et al. (2007) also showed, for finding the coordinates of the third vertex of a triangle with an area of 12 units^2, some candidates found a finite set of points within certain intervals or in the form of whole numbers. However, few candidates stated that the vertex could be at any point on $x = 4$ and $x = -4$ lines and, therefore, an indefinite number of triangles could be constructed. This way of thinking is called "reasoning by continuity" (Goldenberg, Cuoco, & Mark, 1998), which is a powerful mathematical thinking and a basic indicator of the investigating invariants component of geometric habits of mind. In this study, balancing exploration and reflection appeared explicitly in the perimeter problem. The majority of candidates intuitively constructed random triangles for the desired triangle and tried familiar strategies. Only two went beyond spontaneous thinking and trials, and they engaged in holistic thinking by returning to the big picture and visualizing the final state—these strategies indicate geometric habits of mind. Similarly, the component balancing exploration and reflection was the least used habit among the teacher candidates in Koç and Bozkurt's (2012) study. In addition, in their study about primary school teacher candidates' problem-posing skills on semi-structured situations, Işık and Kar (2012) found that participants could pose very few problems regarding the desired situation, that most of the problems they posed could be solved through simple calculations, and that these were related to a limited number of different mathematical concepts.

This study investigated primary school teachers' ways of geometric thinking in perimeter and area problems. It found that the participants did not possess different ways of thinking with respect to the components of geometric habits of mind, that they could not analyze the given problems appropriately, that they acted on the first idea they came up with, but could not apply these actions on the whole of a problem and, therefore, their geometric habits of mind were not at the desired level. On the other hand, development of geometric habits of mind cannot be limited only to university education and, thus, teacher candidates' previous learning experiences could have played a key role in this result. Systematic problem-solving activities and classroom discussions are needed for developing geometric habits of mind.

References/Kaynakça

Akkuş Çıkla, O. ve Duatepe, A. (2002). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının orantısal akıl yürütme becerileri üzerine niteliksel bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 23*, 32-40.

Amit, M., & Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *Zentralbatt für Didaktik der Mathematics (ZDM), 40*, 111-129.

Cuoco, A. (2008, January). *Mathematical habits of mind: An organizing principle for curriculum design*. Paper presented at a Project Next Session on Helping Students Develop Mathematical Habits on Mind, Joint Mathematics Meetings, San Diego, CA. Retrieved from http://www2.edc.org/CME/showcase.html.

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of minds: An organizing principle for mathematics curricula. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 375-402.

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (2010). Contemporary curriculum issues: Organizing a curriculum around mathematical habits of mind. *Mathematics Teacher*, *103*(9), 682-688

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers grades 6-10*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Driscoll, M., DiMatteo, R. W., Nikula, J., & Egan, M. (2007). *Fostering geometric thinking. A guide for teachers, grades 5-10*. Portsmouth: Heinemann.

Goldenberg, P. (2009). *Mathematical habits of mind and the language-learning brain: Algebra as a second language*. Paper presented at an AMS-MAA-MER Special Session on Mathematics and Education Reform, Joint Mathematics Meetings, Washington, DC. Retrieved from http://www.math.utep.edu/Faculty/kienlim/hom.html

Goldenberg, E. P., Cuoco, A. A., & Mark, J. (1998). A role for geometry in general education. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 3-44). Mahwh, NJ: Lavrance Erlbaum Associates.

Goldenberg, E. P., Shteingold, N., & Feurzeig, N. (2003). Mathematical habits of mind for young children. In F. K. Lester & R. I. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving: Prekindergarten-Grade 6* (pp. 15-29). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Harel, G. (2007). The DNR system as a conceptual framework for curriculum development an instruction. In R. Lesh, J. Kaput & E. Hamilton (Eds.), *Foundations for the future in mathematics education* (pp. 263-280). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Harel, G. (2008). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. In B. Gold & R. Simons (Eds.), *Current issues in the philosophy of mathematics from the perspective of mathematicians* (pp. 265-290). Washington, DC: Mathematical American Association.

Işık, C. ve Kar, T. (2012). Sınıf öğretmeni adaylarının problem kurma becerileri. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 23*, 190-214.

Koç, Y., & Bozkurt, A. (2012). Investigating prospective mathematics teachers' knowledge of volume of cylinders. *Energy Education Science and Technology Part B: Social and Educational Studies* [Special Issue I]*, 4,* 148-153.

Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. In *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2330-2339), Larnaca, Cyprus.

Levasseur, K., & Cuoco, A. (2003). Mathematical habits of mind. In H. L. Schoen (Ed.), *Teaching mathematics through problem solving: Grade 6-12* (pp. 23-37). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lim, K. H. (2008). *Students' mental acts of anticipating: Foreseeing and predicting while solving problems involving algebraic inequalities and equations*. Saarbrücken, Germany: VDM.

Mark, J., Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Sword, (2009). *Developing mathematical habits of mind in the middle grades*. Retrieved from http://www2.edc.org/cme/hom/hom-middle-grades.pdf

Mason, J., & Spence, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics*, *38*, 135-161.

Menon, R. (1998). Pre-service teachers' understanding of perimeter and area. *School Science and Mathematics*, *98*(7), 361-368.

Miles, M., & Huberman, M. (1994). *An expanded sourcebook qualitative data analysis* (2nd ed.). California: Sage.

Özen, D. ve Köse, N. Y. (2013, Haziran). *Geometrik cisimler konusunda bir ders imecesi örneği*. 1. Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu'nda sunulan bildiri, Trabzon.

Reinke, K. S. (1997). Area and perimeter: Pre-service teachers' confusion. *School Science and Mathematics*, *97*(2), 75-77.

Watson, A., & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 205-215.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2003). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* Ankara: Sözkesen Matbaacılık.

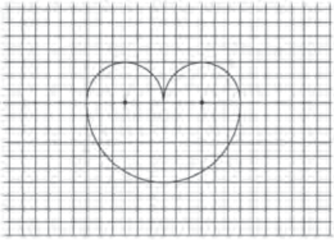
Ek 1.

Öğretmen Adaylarına Sorulan Problemlerden Bir Örnek

Ad-Soyad:

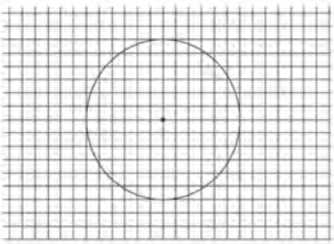
OTLAKLARI HESAPLAYALIM

Eskişehir'de tüm otlakların çemberler ve çember parçaları ile birbiriyle bağlandıklarını düşünelim. Örneğin otlak A şekilde görüldüğü gibi 3 yarım çemberden oluşturulur.



Otlak A

1. Otlak A ile aşağıda şekli verilen otlak B'yi karşılaştırınız.

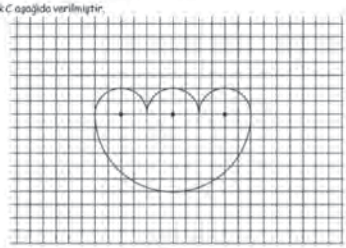


Otlak B

a. Bu otlaklardan hangisinin alanı büyüktür. Açıklayın (uygun matematiksel dil ile)

b. Her otlağın dış çeperindeki eğri çit ile çevrilirse, hangi otlak için daha fazla çite gereksinim vardır? Otlak A ve otlak B için ne kadar çit gerekir? Açıklayınız.

2. Otlak C aşağıda verilmiştir.



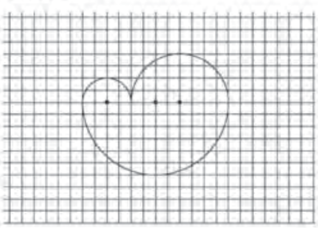
Otlak C

a. Otlak C için ne kadar çite gereksinim vardır? Açıklayınız.

b. Otlak A ve otlak B için gerekli olan çit sayısı ile Otlak C için gerekli olan çit sayısı karşılaştırın. Aralarındaki ilişkiyi açıklayınız.

c. Otlak C'nin alanı nedir? Açıklayınız.

3. Otlak D aşağıda verilmiştir.



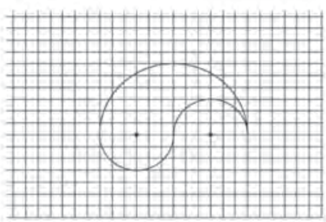
Otlak D

a. Hesaplamadan önce Otlak D için gerekli olan çit sayısını tahmin ediniz. Bu tahmininizi nasıl yaptığınızı açıklayınız.

b. Tahmininizi Otlak D için gerekli çit sayısını hesaplayarak yaparak kontrol ediniz.

Ek

Otlak E aşağıda verilmiştir.



Otlak E

1. Otlak E'nin tam alanını hesaplamak için iki yol tanımlayınız. Her bir yöntemi açıklayınız.

2. Otlak E için gerekli olan çit sayısını açıklayarak hesaplayınız.