ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.:8-Sayı/No: 1 : 85-91 (2007)

ARAŞTIRMA MAKALESİ /**RESEARCH ARTICLE**

POLİNOMLAR UZAYINDA SCHUR KONVEKS YÖNLER

Handan AKYAR[1]

ÖZ

Bu çalışmada, düşük dereceli polinomların Schur konveks yön olması için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. Aralık polinomlar ailesinin Schur kararlılığı ile ilgili bilinen bir teoremin Schur konveks yön kavramıyla yeni bir kanıtı verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Konveks yön, Schur kararlılık, Aralık polinomlar

SCHUR CONVEX DIRECTIONS IN THE SPACE OF POLYNOMIALS

ABSTRACT

In this paper, necessary and sufficient conditions which assure the Schur convex direction for lower order polynomials are obtained. In view of the Schur convex direction notion a new proof for a known theorem concerning the Schur stability of family of interval polynomials is presented.

Keywords: Convex direction, Schur stability, Interval polynomials

[1], Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, 26470 Eskişehir.
Tel: +90 222 3350580/5637; **Fax:** +90 222 3204910; **E-posta:** hakyar@anadolu.edu.tr

Geliş: 18 Nisan 2006; **Kabul:** 04 Ağustos 2006

1. GİRİŞ

Gerçel katsayılı n. dereceden

$$p(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n,(a_n\neq 0) \quad \textbf{(1)}$$

polinomu verilsin. Eğer $p(z)$ polinomunun tüm kökleri kompleks düzlemin sol açık yarı düzleminde ise $p(z)$ polinomuna Hurwitz kararlı polinom, açık birim diskin içinde ise Schur kararlı polinom denir. Bilindiği gibi kompleks düzlemde $z=\dfrac{s+1}{s-1}$ dönüşümü açık birim diskten sol açık yarı düzleme bire-bir, sürekli dönüşümdür. Buna göre, $p(z)$ polinomunun Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\tilde{p}(s):=(s-1)^n p(\frac{s+1}{s-1})$$

polinomunun Hurwitz kararlı olmasıdır (Bose, 1985).

Bir çok pratik problemde $p(z)$ polinomunun katsayıları kesin olarak bilinmemekte, ancak bunların değişebileceği sınırlar bilinmektedir. Bu durumda $p(z)$ polinomu yerine $\mathbf{q}\in Q\subset R^l$ belirsizlik parametresi içeren

$$p(z,\mathbf{q})=a_0(\mathbf{q})+a_1(\mathbf{q})z+a_2(\mathbf{q})z^2+\cdots+a_n(\mathbf{q})z^n \quad \textbf{(2)}$$

polinomu ve

$$P=\{p(z,\mathbf{q}):\mathbf{q}\in Q\subset R^l\} \quad \textbf{(3)}$$

ailesi ortaya çıkar. $p(z,\mathbf{q})$ polinomunda katsayı fonksiyonlarının $\mathbf{q}$ ya bağımlılığı ve Q kümesinin özelliklerine göre, çeşitli aileler ortaya çıkmaktadır (Kharitonov, 1978), (Barmish, 1994), (Bhattacharyya vd., 1995). Eğer Q kümesi bir kutu, yani

$$Q=\{(q_0,q_1,\ldots,q_n)\in R^{n+1}:q_i^-\leq q_i\leq q_i^+, i=0,1,\ldots,n\} \quad \textbf{(4)}$$

ve $a_i(\mathbf{q})=a_i(q_0,q_1,\ldots,q_n)=q_i$, $(i=0,1,\ldots,n)$ ise, P ailesine aralık polinomlar ailesi; eğer $a_i(\mathbf{q})$ fonksiyonları $\mathbf{q}$ ya göre afin fonksiyonlar ise, P ailesine afin polinomlar ailesi denir. Eğer ailedeki her polinom Schur (Hurwitz) kararlı ise, bu aileye (gürbüz) Schur (Hurwitz) kararlı aile denir.

Schur (Hurwitz) kararlı polinomlar uzayında, iki Schur (Hurwitz) kararlı polinomu birleştiren doğru parçasının kararlılığını inceleme yöntemlerinden biri konveks yön yöntemidir (Rantzer, 1992), (Barmish, 1994), (Bhattacharyya vd., 1995).

Tanım 1.1. Derecesi $m\leq n$ olan $g(z)$ polinomu verilsin. Eğer,

a) $f(z)+g(z)$ polinomu Schur (Hurwitz) kararlı,

b) Her $\lambda\in[0,1]$ için derece $f(z)+\lambda g(z)=n$

koşullarını sağlayan her Schur (Hurwitz) kararlı $f(z)$ polinomu için $f(z)+\lambda g(z)$ polinomu her $\lambda\in(0,1)$ için Schur (Hurwitz) kararlı ise $g(z)$ polinomuna Schur (Hurwitz) konveks yön denir.

Aşağıdaki teorem, Hurwitz kararlılıkla Schur kararlılık arasındaki bağlantının bir sonucudur.

Teorem 1.2. $g(z)$ polinomunun Schur konveks yön olması için gerek ve yeter koşul

$$\tilde{g}(s)=(s-1)^m g(\frac{s+1}{s-1}) \quad \textbf{(5)}$$

polinomunun Hurwitz konveks yön olmasıdır.

Tanım 1.3 ((Rantzer, 1992), (Barmish, 1994)). $\tilde{g}(iw)\neq 0$ olan her $w>0$ için,

$$\frac{d}{dw}\arg(\tilde{g}(iw))\leq\left|\frac{\sin 2(\arg(\tilde{g}(iw)))}{2w}\right| \quad \textbf{(6)}$$

eşitsizliğini sağlayan $\tilde{g}(s)$ polinomuna, artım koşulunu sağlayan polinom denir.

Teorem 1.4 ((Rantzer, 1992)). $\tilde{g}(s)$ polinomunun Hurwitz konveks yön olması için gerek ve yeter koşul $\tilde{g}(s)$ polinomunun (6) artım koşulunu sağlamasıdır.

$$\tilde{g}(iw)=x(w)+iy(w) \quad \textbf{(7)}$$

olmak üzere, (6) artım koşulu

$$y'(w)x(w)-x'(w)y(w)\leq\frac{1}{w}\left|x(w)y(w)\right| (\text{ her } w>0 \text{ için }) \quad \textbf{(8)}$$

eşitsizliğine dönüştürülebilir (Dzhafarov vd., 2002). Burada, $x'(w)$ ve $y'(w)$ türevleri göstermektedir.

2. Bölümde, Schur kararlı polinomlar uzayında derecesi $n\leq 3$ olan polinomların Schur konveks yön olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir.

(3) aralık polinomlar ailesi verilsin. Kharitonov Teoremine göre (Kharitonov, 1978), Q kutusunun uç noktalarına karşılık gelen özel seçilmiş dört tane polinomun Hurwitz kararlı olması, (3) aralık polinomlar ailesinin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşuldur. Fakat Schur kararlılık için bu doğru değildir. Hatta aralık polinomlar ailesinin tüm uç noktaları Schur kararlı olsa bile aile Schur kararlı olmayabilir (Bose ve Zeheb, 1986). Ancak Q kutusu özel seçildiğinde uç noktaların Schur kararlılığından ailenin

Schur kararlılığı elde edilir. 3. Bölümde bu sonucun konveks yön yardımıyla yeni bir kanıtı verilmiştir.

2. SCHUR KONVEKS YÖNLER

1) $g_1(z) = z + a, (a \neq -1)$ olsun. Bu durumda,

$$\tilde{g}_1(s) = s + \frac{1-a}{1+a}$$

olur. $\tilde{g}_1(s)$ polinomu için (8) artım koşulu

$$\frac{1-a}{1+a} \leq \left|\frac{1-a}{1+a}\right|$$

eşitsizliğine denktir. Bu eşitsizlik tüm $a \neq -1$ değerleri için sağlanır.

Eğer $a = -1$ olursa, $g_1(z) = z - 1$, $\tilde{g}_1(s) = 2$ olur. Her sabit polinom Hurwitz konveks yön olduğundan, her a için $g_1(z)$ polinomu Schur konveks yön olur.

2) $g_2(z) = z^2 + bz + a$ olsun.

$$\tilde{g}_2(s) = s^2 + \frac{2(1-a)}{1+a+b}s + \frac{1+a-b}{1+a+b}$$

olur. $\tilde{g}_2(s)$ polinomu için (8) artım koşulundan

$$\frac{2(1-a)}{1+a+b} \leq 0 \text{ veya } \frac{1+a-b}{1+a+b} \leq 0$$

elde edilir. Bu eşitsizliklerden aşağıdaki önerme verilebilir.

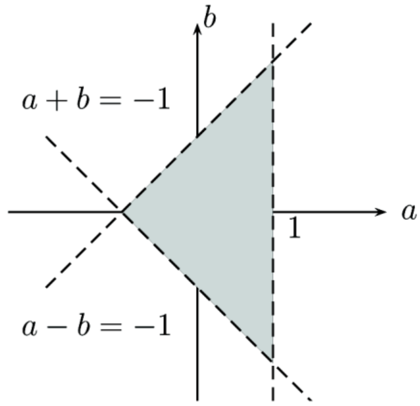
Önerme 2.1. $g_2(z)$ polinomunun Schur konveks yön olması için gerek ve yeter koşul

$$a \geq 1, a + b > -1$$
veya
$$a \leq 1, a + b < -1$$
veya
$$a - b \leq -1, a + b > -1$$
veya
$$a - b \geq -1, a + b < -1$$

olmasıdır.

$g_2(z)$ polinomunun Schur konveks yön olması için gerek ve yeter koşul (a, b) vektörünün Şekil 1 deki taralı bölgenin dışında olmasıdır.

3) 3.dereceden bir polinomun Hurwitz konveks yön olması için bilinen koşulları kullanarak, bu polinomun Schur konveks yön olması için gerek ve yeter koşul verebiliriz.



Şekil 1. 2. dereceden Schur konveks yönlere karşılık gelen bölgenin tümleyeni

Önerme 2.2 (Dzhafarov vd., 2002)). 3.dereceden $c(s) = s^3 + \alpha s^2 + \beta s + \gamma$ polinomunun Hurwitz konveks yön olması için gerek ve yeter koşul

$$\alpha\beta \leq \gamma \text{ veya her } w > 0 \text{ için } \alpha w^4 - 2\gamma w^2 + \beta\gamma \leq 0 \qquad \textbf{(9)}$$

olmasıdır.

Önerme 2.3. Önerme 2.2 de verilen (9) koşulu,

$$\alpha\beta \leq \gamma \text{ veya } \alpha < 0, \beta \leq 0, \gamma \geq 0 \qquad \textbf{(10)}$$

koşuluna denktir.

Kanıt.

$$\alpha w^4 - 2\gamma w^2 + \beta\gamma \leq 0$$

eşitsizliğinde $w^2 = t$ alınırsa,

$$\sup_{t>0}(\alpha t^2 - 2\gamma t + \beta\gamma) \leq 0 \qquad \textbf{(11)}$$

olur.

$$\alpha\beta > \gamma, \sup_{t>0} \ \alpha t^2 - 2\gamma t + \beta\gamma \ \leq 0 \qquad \textbf{(12)}$$

eşitsizliklerinin geçerli olması için

$$\alpha < 0, \beta \leq 0, \gamma \geq 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$\alpha > 0$ olursa $t \to \infty$ iken $\alpha t^2 - 2\gamma t + \beta\gamma \to \infty$ olacağından, (11) eşitsizliği sağlanmaz, buna göre $\alpha \leq 0$ olmalıdır. Eğer $\alpha = 0$ olursa, (12) de $\gamma < 0$ elde edilir, bu ise (12) deki ikinci eşitsizlik ile çelişir. Dolayısıyla $\alpha < 0$ olmalıdır. Bu durumda (11) eşitsizliği

$$\inf_{t>0}\left(t^2-\frac{2\gamma}{\alpha}t+\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)\geq 0 \quad \textbf{(13)}$$

gibi yazılır. (13) ün gerçekleşmesi için parantez içindeki üç terimlinin Δ diskriminantını inceleyelim:

Eğer $\Delta \leq 0$ ise,

$$\Delta=\frac{1}{\alpha^2}\ \gamma(\gamma-\alpha\beta)\ \leq 0$$

olur. (12) den $\gamma-\alpha\beta<0$ olduğu için $\gamma\geq 0$ bulunur. $\alpha\beta>\gamma$ dan ise $\beta\leq 0$ elde edilir. Yani $\alpha<0$, $\beta\leq 0$, $\gamma\geq 0$ sağlanır.

Eğer $\Delta>0$ ise, $\gamma(\gamma-\alpha\beta)>0$, $\gamma-\alpha\beta<0$ eşitsizliklerinden $\gamma<0$ elde edilir. $t^2-\frac{2\gamma}{\alpha}t+\frac{\beta\gamma}{\alpha}$ üçterimlisinin kökleri t_1 ve t_2 olsun. Eğer köklerden biri pozitif olursa, o zaman (13) sağlanmaz. Dolayısıyla $t_1\leq 0$, $t_2\leq 0$ olmalıdır. Diğer taraftan,

$$\frac{2\gamma}{\alpha}=t_1+t_2\leq 0$$

eşitsizliğinden $\gamma\geq 0$ elde edilir, bu ise $\gamma<0$ ile çelişir. Sonuç olarak, (12) nin sağlanması durumunda $\Delta>0$ sağlanamaz.

Tersine, (10) eşitsizliğinden (9) eşitsizliğinin doğruluğu açıktır.

3. dereceden $g_3(z)=z^3+cz^2+bz+a$ polinomunu göz önüne alalım.

$$\tilde{g}_3(s)=s^3+\frac{3-3a-b+c}{1+a+b+c}s^2+\frac{3+3a-b-c}{1+a+b+c}s+\frac{1-a+b-c}{1+a+b+c}$$

olur. Burada

$$\alpha=\frac{3-3a-b+c}{1+a+b+c},\beta=\frac{3+3a-b-c}{1+a+b+c},\gamma=\frac{1-a+b-c}{1+a+b+c}$$

alınırsa, $\tilde{g}_3(s)$ polinomunun (10) eşitsizliklerini sağlaması için

$a^2+b-ac-1\geq 0$ veya

$$\frac{3-3a-b+c}{1+a+b+c}<0,\frac{3+3a-b-c}{1+a+b+c}\leq 0,\frac{1-a+b-c}{1+a+b+c}\geq 0$$

olmalıdır. O halde, 3. dereceden bir polinomun Schur konveks yön olması için Önerme 2.3 ten aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 2.4. $g_3(z)$ polinomunun Schur konveks yön olması için gerek ve yeter koşul

$$a^2+b-ac-1\geq 0$$

veya

$$\left\{\begin{matrix}1+a+b+c>0\\ 3-3a-b+c<0\\ 3+3a-b-c\leq 0\\ 1-a+b-c\geq 0\end{matrix}\right\}\text{ veya }\left\{\begin{matrix}1+a+b+c<0\\ 3-3a-b+c>0\\ 3+3a-b-c\geq 0\\ 1-a+b-c\leq 0\end{matrix}\right\}$$

olmasıdır.

2. dereceden Schur konveks yön olmayan $g_2(z)=z^2+bz+a$ polinomlarında (a,b) çiftlerinin oluşturduğu sınırlı küme Şekil 1 de gösterilmiştir. 3. dereceden Schur konveks yön olmayan $g_3(z)=z^3+cz^2+bz+a$ polinomlarında (a,b,c) üçlülerinin oluşturduğu küme ise sınırlı değildir. Gerçekten, n doğal sayı olmak üzere $a=-n$, $b=0$ ve $c=-2n$ alınırsa, $a^2+b-ac-1=-n^2-1<0$, $3-3a-b+c=n+3>0$, $1-a+b-c=3n+1>0$ olduğundan $(a,b,c)=(-n,0,-2n)$ üçlüsünün belirlediği $g_3(z)=z^3+cz^2+bz+a$ polinomu Önerme 2.4 e göre Schur konveks yön değil ve bu üçlülerin oluşturduğu küme sınırlı değildir.

Şimdi Schur konveks yön ile ilgili bir örnek verelim.

Örnek 2.5.

$$p_1(z)=a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0,$$
$$p_2(z)=b_3z^3+b_2z^2+b_1z+b_0$$

simetrik kısımları aynı olan polinomlar ise yani,

$$\begin{aligned}a_0+a_3&=b_0+b_3\\ a_1+a_2&=b_1+b_2\end{aligned} \quad \textbf{(14)}$$

ise, $p_2(z)-p_1(z)$ polinomu Schur konveks yön olur. Gerçekten,

$$\frac{1}{b_3-a_3}\cdot\ p_2(z)-p_1(z)\ =\left(z^3+\frac{b_2-a_2}{b_3-a_3}z^2+\frac{b_1-a_1}{b_3-a_3}z+\frac{b_0-a_0}{b_3-a_3}\right)=z^3+cz^2+bz+a$$

olur. (14) koşulu dikkate alınırsa, $a^2+b-ac-1=0$ bulunur. O halde Önerme 2.4 e göre, $p_2(z)-p_1(z)$ polinomu Schur konveks yöndür.

3. ARALIK POLİNOMLAR AİLESİNİN SCHUR KARARLILIĞI

Schur kararlı polinomlar uzayında Schur konveks yön kavramının bir uygulamasını verelim.

Teorem 3.1. Q kümesi uç noktaları $\{\mathbf{q}^{\mathbf{i}}\}$ olan (4) biçiminde bir kutu olmak üzere (3) aralık polinomlar ailesi verilsin, $\sum_{i=0}^{n} q_i^+ < 0$ veya $\sum_{i=0}^{n} q_i^- > 0$ olsun. Ayrıca, n tek ve $i = \frac{(n+1)}{2}+1,\ldots,n$ için $q_i^- = q_i^+$ olsun. Bu durumda P ailesinin Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul $p(z,\mathbf{q}^{\mathbf{i}})$ uç polinomlarının Schur kararlı olmasıdır.

Kanıt. P ailesi Schur kararlı olsun. $p(z,\mathbf{q}^{\mathbf{i}}) \in P$ olduğu için $p(z,\mathbf{q}^{\mathbf{i}})$ uç polinomları da Schur kararlı olur.

Tersine, $p(z,\mathbf{q}^{\mathbf{i}})$ uç polinomları Schur kararlı olsun. Bu durumda ailenin Schur kararlı olduğunu gösterelim.

$n = 2m-1$, $(m \in N^+)$ olsun. O zaman

$$k = 0,1,\ldots,m \quad \text{için} \quad q_k \in [q_k^-, q_k^+]$$
$$k = m+1, m+2,\ldots,n \quad \text{için} \quad q_k^- = q_k^+$$

olur.

$$p(z,\mathbf{q}) = q_0 + q_1 z + \cdots + q_{n-1}z^{n-1} + q_n z^n,\ \mathbf{q}\in Q$$

polinomunun $z = \dfrac{s+1}{s-1}$ dönüşümü altındaki görüntüsünden elde edilen

$$\begin{aligned}\tilde{p}(s,\mathbf{q}) &= (s-1)^n\, p\left(\frac{s+1}{s-1},\mathbf{q}\right)\\ &= (s-1)^n\left[q_0 + q_1\left(\frac{s+1}{s-1}\right) + \cdots + q_{n-1}\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^{n-1} + q_n\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^n\right]\\ &= q_0(s-1)^n + q_1(s+1)(s-1)^{n-1} + \cdots + q_{n-1}(s+1)^{n-1}(s-1)\\ &\quad + q_n(s+1)^n\end{aligned} \quad \textbf{(15)}$$

polinomunu ele alalım. P aralık polinomlar ailesinin Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\tilde{P} = \tilde{p}(\cdot,\mathbf{q}) : \mathbf{q}\in Q$$

polinomlar ailesinin Hurwitz kararlı olmasıdır. (15) ifadesinden de görüldüğü gibi s^n nin katsayısı $\sum_{i=0}^{n} q_i$ olduğundan teoremin koşullarından dolayı $\tilde{P}$ ailesinin derecesi invaryanttır, yani ailedeki tüm polinomların derecesi n dir. Başlangıçta uç polinomlar Schur kararlı kabul edildiğinden her bir $\tilde{p}(s,\mathbf{q}^{\mathbf{i}})$ polinomu Hurwitz kararlı olur.

Şimdi $\tilde{P}$ ailesinin Hurwitz kararlı olduğunu gösterelim.

$\tilde{p}(s,\mathbf{q})$ afin belirsizlik yapısına sahip olduğu için Kenar Teoremine göre (Barmish, 1994, Teorem 9.4.1), $\tilde{p}(s,\mathbf{q})$ ailesinin Hurwitz kararlı olması için tüm kenarların Hurwitz kararlı olması yeterlidir. Bu ailenin kenarları ise

$$\tilde{p}_k(s,q_k) = q_k(s+1)^k(s-1)^{n-k} + \sum_{i\neq k} q_i^{\pm}(s+1)^i(s-1)^{n-i},\ q_k \in [q_k^-, q_k^+] \quad \textbf{(16)}$$

($n = 2m-1, k = 0,1,\ldots,m$) polinom segmentleridir. $k = 0,1,\ldots,m-1$ için bu segmentlerin Hurwitz kararlılığı (Barmish, 1994, Teorem 13.2.3) den çıkmaktadır. Buna göre $k = m$ için

$$\tilde{p}_m(s,q_m) = q_m(s+1)^m(s-1)^{n-m} + \sum_{i\neq m} q_i^{\pm}(s+1)^i(s-1)^{n-i},\ q_m \in [q_m^-, q_m^+] \quad \textbf{(17)}$$

segmentinin Hurwitz kararlı olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için uç polinomların farkından elde edilen $g(s) = (s+1)^m(s-1)^{n-m}$ polinomunun Hurwitz konveks yön olduğunu gösterelim. Her $w>0$ için (8) eşitsizliğini sağladığını göstermek yeterli olacaktır.

$$\varphi = \arctan w, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \text{ olmak üzere,}$$

$$\begin{aligned} g(iw) &= (iw+1)^m(iw-1)^{n-m}\\ &= \left[\sqrt{1+w^2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^m \cdot\\ &\quad \cdot\left[\sqrt{1+w^2}(\cos(\pi-\varphi) + i\sin(\pi-\varphi)\right]^{n-m}\\ &= \left(\sqrt{1+w^2}\right)^{n-m+m} \cos(m\varphi) + i\sin(m\varphi) \cdot\\ &\quad \cdot\left[\cos\ (n-m)(\pi-\varphi)\ + i\sin\ (n-m)(\pi-\varphi)\ \right]\\ &= \left(1+w^2\right)^{\frac{n}{2}}\left[\cos\ (n-m)\pi - (n-m)\varphi + m\varphi\right.\\ &\quad \left. + i\sin\ (n-m)\pi - (n-m)\varphi + m\varphi\ \right]\\ &= \left(1+w^2\right)^{\frac{n}{2}}\left[\cos\left((n-m)\pi - (n-2m)\varphi\right)\right.\\ &\quad \left. + i\sin\left((n-m)\pi - (n-2m)\varphi\right)\right]\\ &= \left(1+w^2\right)^{\frac{n}{2}}\left[(-1)^{n-m}\cos\left((n-2m)\varphi\right)\right]\\ &\quad + i\left(1+w^2\right)^{\frac{n}{2}}\left[(-1)^{n-m+1}\sin\left((n-2m)\varphi\right)\right]\end{aligned}$$

yazılabilir.

$$x(w) = \left(1+w^2\right)^{\frac{n}{2}}\left[(-1)^{n-m}\cos\ (n-2m)\varphi\ \right]$$

ve

$$y(w) = \left(1+w^2\right)^{\frac{n}{2}} \left[(-1)^{n-m+1} \sin\ (n-2m)\varphi \ \right]$$

alınırsa, $g(iw) = x(w) + iy(w)$ olur. $x(w)$ ve $y(w)$ fonksiyonlarının türevleri hesaplanırsa,

$$x'(w) = (-1)^{n-m}\left(1+w^2\right)^{\frac{n}{2}-1}\left[nw\cos\ (n-2m)\varphi\ - (n-2m)\sin\ (n-2m)\varphi \ \right]$$
$$y'(w) = (-1)^{n-m+1}\left(1+w^2\right)^{\frac{n}{2}-1}\left[nw\sin\ (n-2m)\varphi\ + (n-2m)\cos\ (n-2m)\varphi \ \right]$$

bulunur.

$$\begin{aligned} y'(w)x(w) &= (-1)^{2(n-m)+1}(1+w^2)^{n-1}\Big[nw\sin\ (n-2m)\varphi \\ &\quad + (n-2m)\cos\ (n-2m)\varphi\ \Big]\cdot\cos\ (n-2m)\varphi \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} x'(w)y(w) &= (-1)^{2(n-m)+1}(1+w^2)^{n-1}\Big[nw\cos\ (n-2m)\varphi \\ &\quad - (n-2m)\sin\ (n-2m)\varphi\ \Big]\cdot\sin\ (n-2m)\varphi \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} y'(w)x(w) - x'(w)y(w) &= -(1+w^2)^{n-1}(n-2m)\Big[\cos^2\ (n-2m)\varphi \\ &\quad + \sin^2\ (n-2m)\varphi\ \Big] \\ &= -(1+w^2)^{n-1}(n-2m) \qquad \textbf{(18)} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{w}\left|x(w)y(w)\right| &= \frac{1}{w}\left|(1+w^2)^n(-1)^{2(n-m)+1}\cos\ (n-2m)\varphi\ \sin\ (n-2m)\varphi\ \right| \\ &= \frac{(1+w^2)^n}{2w}\cdot\left|\sin 2\ (n-2m)\varphi\ \right|, (n-2m=-1) \\ &= \frac{(1+w^2)^n}{2w}\cdot\left|\sin(-2\varphi)\right| \\ &= \frac{(1+w^2)^n}{2w}\cdot\sin(2\varphi) \\ &= \frac{(1+w^2)^n}{2w}\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi \\ &= \frac{(1+w^2)^n}{w}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos^2\varphi \\ &= \frac{(1+w^2)^n}{w}\cdot\frac{\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi} \\ &= \frac{(1+w^2)^n}{w}\cdot\frac{w}{1+w^2} \\ &= (1+w^2)^{n-1} \qquad \textbf{(19)} \end{aligned}$$

bulunur. (18) ve (19) eşitlikleri yardımı ile (8) eşitsizliği yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned} y'(w)x(w) - x'(w)y(w) &\le \frac{1}{w}\left|x(w)y(w)\right| \\ -(1+w^2)^{n-1}(n-2m) &\le (1+w^2)^{n-1} \qquad \textbf{(20)} \\ 2m-n &\le 1 \\ 1 &\le 1 \end{aligned}$$

elde edildiğinden (8) sağlanmış olur. Buradan $g(s)$ polinomu Hurwitz konveks yöndür.

(17) kenar polinomununun uç polinomları Hurwitz kararlı ve $g(s)$ Hurwitz konveks yön olduğundan, (17) kenar polinomu Hurwitz kararlı olur. Kenar Teoremine göre, katsayıları afin belirsizlik yapısına sahip $\tilde{P}$ polinomlar ailesinin tüm kenarları Hurwitz kararlı ise aile Hurwitz kararlıdır. Tüm kenarlar Hurwitz kararlı olduğu için $\tilde{P}$ ailesi Hurwitz kararlı olur. O halde P aralık polinomlar ailesi Schur kararlıdır.

4. SONUÇ

Derecesi $n \le 3$ olan polinomların Schur konveks yön olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. 2. dereceden Schur konveks yön olmayan polinomların katsayılarının oluşturduğu bölge sınırlı olmasına rağmen, 3. dereceden Schur konveks yön olmayan polinomlarda katsayılarının oluşturduğu bölgenin sınırsız olduğu görülmüştür. Aralık polinomlar ailesinin Schur kararlılığı ile ilgili (Perez vd., 1992) deki teoremin Rantzer'in artım koşulu kullanılarak yeni bir kanıtı yapılmıştır.

KAYNAKÇA

Barmish, B.R. (1994). New Tools for Robustness of Linear Systems. Macmillan Publishing Company, New York.

Bhattacharyya, S.P., Chapellat, H. ve Keel, L.H. (1995). Robust Control The Parametric Approach. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ.

Bose, N. K. (1985). Digital Filters Theory and Applications. Elsevier Science Publishing Co., Inc., North-Holland.

Bose, N.K. ve Zeheb, E. (1986). Kharitonov's theorem and stability test of multidimensional digital filters. *IEE Proceedings*, Part G, 133, 187-190.

Dzhafarov, V., Koçak, Ş. ve Azcan, H. (2002). A Note on a Theorem of Rantzer. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 12(5), 403-407.

Hollot, C. V. ve Bartlett, A. C. (1986). Some Discrete-Time Counterparts to Kharitonov's Stability Criterion for Uncertain Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 31(4), 355-356.

Kharitonov, V. L. (1978). Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations. *Differentsial'nye Uravneniya* 14, 2086-2088.

Perez, F., Abdallah, C. ve Docampo, D. (1992). Extreme Point Stability Tests for Discrete-time Polynomials, In Proc. of the 31th IEEE Conf. on Decision and Control ss.1552-1553, Tucson.

Rantzer, A. (1992). Stability Conditions for Polytopes of Polynomials. *IEEE Trans. Automat. Contr*. 7, 79-89.

Handan Akyar, 1972 yılında Eskişehir'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Eskişehir'de tamamladı. Anadolu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 1994 yılında mezun oldu. Yüksek Lisansını 1997 yılında Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde, Doktorasını 2005 yılında Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde tamamladı. 1995-2000 yılları arasında Anadolu Üniversitesi Bozüyük Meslek Yüksekokulunda, 2000-2005 de ise Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Öğretim Görevlisi olarak çalıştı. 2005 yılından bu yana Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Öğretim Üyesi olarak görev yapmaktadır.