ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.:8-Sayı/No: 1 : 79-83 (2007)

ARAŞTIRMA MAKALESİ /**RESEARCH ARTICLE**

EN KÜÇÜK KARELER TAHMİN EDİCİSİ İLE BİR SHRINKAGE TAHMİN EDİCİSİNİN ETKİNLİK KARŞILAŞTIRMASI

Meral EBEGİL[1]

ÖZ

Regresyon analizinde bağımsız değişkenler arasında ilişki (çoklu bağlantı) olması durumunda, En Küçük Kareler tahmin yönteminin kullanılması modelde yer alan değişkenler bakımından yanlış model kullanımına ve dolayısıyla yanlış bulgulara neden olabilmektedir. Birbiriyle bağımlılık gösteren bu tür bağımsız değişkenlerle analiz yapmak için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden biri de yanlı tahmin yöntemleridir. Bu çalışmada, Ridge tahmin edicisine dayalı yanlı tahmin edicinin en az, En Küçük Kareler tahmin edicisi kadar etkin olabilmesi için gereklilik ve yeterlilik koşulları araştırıldı.

Anahtar Kelimeler : Ortalama hata kare, Ridge regresyon, Liu-tipi tahmin edici, Doğrusal kabul edilebilir tahmin ediciler, Shrinkage tahmin edicileri

AN EFFICIENCY COMPARISON OF THE LEAST SQUARES ESTIMATOR AND THE SHRINKAGE ESTIMATOR

ABSTRACT

In regression analysis, if there are some kind of relation (multicollinearity) between independent variables, the Least Squares estimation method may lead to the use of wrong models and hence to wrong findings out of the model. Various methods have been devised in order to carry out regression analysis with such independent variables which exhibit dependence on each other. One of such methods is the biased estimation methods. In this study, it has been studied on the necessary and sufficient conditions of biased estimators based on Ridge estimator to be at least efficient as much as the Least Squares estimator.

Keywords: Mean square error, Ridge regression, Liu-type estimator, Linear admissible estimators, Shrinkage estimators.

[1,] Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, 06500, Beşevler, ANKARA.
E-posta: mdemirel@gazi.edu.tr, **fax:** 0(312)2122279

Geliş: 15 Mart 2006; **Kabul:** 01 Ağustos 2006

1. GİRİŞ

Çoklu doğrusal regresyon, değişkenler arasında var olan ilişkilerin ortaya çıkarılmasını sağlayan, pek çok alanda yaygın olarak kullanılan istatistik yöntemlerden biridir. Veri analizi yapan araştırmacılar, çoklu doğrusal regresyon yöntemini model kurmak için kullanırlar. Regresyon katsayılarını tahmin etmek için yaygın olarak kullanılan yöntem En Küçük Kareler (EKK) yöntemidir. Ancak, EKK yönteminin doğru sonuçlar vermesi için çeşitli varsayımların sağlanması gerekmektedir. Bunlardan biri bağımsız değişkenler arasında ilişki olmamasıdır. Ama gerçekte bu durum her zaman sağlanmayabilir. Böyle durumlarda, EKK tahmin yönteminin kullanılması yanlış model bulgularına ve kullanımına neden olur. Bu tür birbiriyle ilişkili bağımsız değişkenlerle analiz yapmak için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden bir tanesi de yanlı tahmin yöntemleridir. Yanlı tahmin yöntemlerinin başlıcaları; Temel Bileşenler regresyonu, Ridge regresyonu ve bunların türevleridir. Yanlı yöntemlere ilişkin bu tahmin ediciler, EKK tahmin edicilerine göre yanlı, ancak çok daha küçük varyanslı tahminler verirler. Yanlı tahmin yöntemlerinde genel amaç, EKK tahmin yönteminde büyük olan varyans alanını küçük bir yan karşılığında daraltmaktır. Böylece EKK yöntemine göre daha doğru sonuçlar elde edilir.

Yanlı tahmin ediciler sınıfının içinde yer alan bazı tahmin ediciler, Shrinkage tahmin edicileri olarak adlandırılır. Temel Bileşenler regresyonu, Ridge regresyonu ve bunların türevleri bu sınıfın birer üyesidirler. Farebrother (1978) yaptığı çalışmasında, Shrinkage tahmin edicileri için genel bir yapı oluşturmuştur. Ridge, Temel Bileşenler ve Koşullu-minimum hata kare ortalamalı yanlı tahmin edicilerinin birer Shrinkage tahmin edicisi olduklarını göstermiştir. Liski (1982) çalışmasında, EKK tahmin edicisi ile Shrinkage tahmin edicisi arasında seçim yapmak için güçlü Ortalama Hata Kare (OHK) ölçütünü vermiştir. Yine Liski (1983) çalışmasında EKK tahmin edicisi ile Shrinkage tahmin edicisi arasında seçim yapmak için daha zayıf OHK test işlemini kullanmıştır. Kejian (1993) çalışmasında Ridge tahmin edicisine alternatif olarak Liu-Kejian tahmin edicisini önermiştir. Daha sonra bu tahmin edici Akdeniz ve Kaçıranlar (1995) tarafından "Liu tahmin edicisi" olarak adlandırılmıştır. Ekni (1997) çalışmasında Liu tahmin edicisini de Shrinkage tahmin ediciler yapısı içinde ifade etmiştir. Sakallıoğlu, Kaçıranlar ve Akdeniz (1997) tarafından Liu tahmin edicisinin iterasyon tahmin edicileri ile karşılaştırılması incelenmiştir. Sakallıoğlu ve Kaçıranlar (2005) tarafından Ridge tahmin edicisine dayalı yanlı bir tahmin edici önerilmiştir. Ebegil (2006) çalışmasında Liu-Tipi ve Ridge tahmin edicisine dayalı yanlı tahmin edicileri de Shrinkage tahmin ediciler yapısı içinde ifade ederek bu tahmin edicilerin birer Shrinkage tahmin edicisi olduğunu göstermiştir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde Shrinkage tahmin edicilerinin temel yapısı verilmiştir. Bu bilgilerin ışığı altında, üçüncü bölümde EKK tahmin edicisi ile Ridge tahmin edicisine dayalı yanlı tahmin edicinin en az EKK tahmin edicisi kadar etkin olabileceği gereklilik ve yeterlilik koşulları varyanstaki büyüme göz önüne alınarak OHK matrisleri yardımıyla oluşturulmuştur.

2. SHRINKAGE TAHMİN EDİCİLER SINIFININ GENEL YAPISI

Bu bölümde doğrusal regresyon modelinden yola çıkarak Shrinkage tahmin edicilerinin genel yapısı verilmiştir.

n gözlemli k bağımsız değişkenli bir çoklu doğrusal regresyon modeli,

$$Y = X\beta + \varepsilon\,, \qquad \begin{array}{l} \varepsilon \sim \ 0,\ \sigma^2 I_n \\ rank\ \ X_{n\times q} \ = q \le n \end{array} \tag{1}$$

biçiminde tanımlanır (Farebrother, 1978). Y, $(n\times 1)$ boyutlu bağımlı değişken vektörü; $q = k+1$ olmak üzere, X, $(n\times q)$ boyutlu stokastik olmayan girdi matrisi; β, $(q\times 1)$ boyutlu bilinmeyen katsayılar vektörü; ε, $E(\varepsilon)=0$ ve $E(\varepsilon\varepsilon')=\sigma^2 I_n$ koşullarını sağlayan hata vektörüdür.

İkinci dereceden moment matrisleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$M_j = E\ \tilde{\beta}_j - \beta\ ' \ \tilde{\beta}_j - \beta\ ; \quad \text{j=1,2} \tag{2}$$

Burada β parametre vektörünün iki tahmin edicisi $\tilde{\beta}_1$ ve $\tilde{\beta}_2$ olsun. Tahmin edicilerin ortalama hata karelerinin genel ölçütü, C, negatif olmayan tanımlı simetrik bir matris olmak üzere,

$$m_j = E\ \tilde{\beta}_j - \beta\ ' C\ \tilde{\beta}_j - \beta\ ; \quad \text{j=1,2} \tag{3}$$

dır.

Teorem 1: Aşağıda verilen koşullar eşdeğerdir.

i. $M_1 - M_2$ negatif olmayan tanımlı bir matristir.

ii. Tüm negatif olmayan tanımlı C matrisleri için $m_1 - m_2 \ge 0$ 'dır (Theobald, 1974).

İki tahmin edici $\tilde{\beta}_1$ ve $\tilde{\beta}_2$ olsun. Tüm β 'lar için $M(\tilde{\beta}_2) - M(\tilde{\beta}_1)$ negatif olmayan tanımlı bir matris ise eş (2)'den $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{\beta}_2$ 'ya göre daha üstün bir tahmin edicidir. Şayet $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinden, daha iyi olabilecek bir diğer tahmin edici yok ise, $\tilde{\beta}$ kabul edilebilir bir tahmin edicidir.

C, $q \times q$ boyutlu negatif olmayan tanımlı simetrik bir matris olsun. Teorem 1'den

$$OHK(\tilde{\beta}_2;C) - OHK(\tilde{\beta}_1;C) \geq 0 \qquad \textbf{(4)}$$

olması ile, $M(\tilde{\beta}_2) - M(\tilde{\beta}_1)$'ın negatif olmayan tanımlı bir matris olması eşdeğerdir.

$(X'X)$ matrisi; $q \times q$ boyutlu, negatif olmayan tanımlı, simetrik bir matris olduğundan dolayı öyle bir ortonormal P matrisi vardır ki $(X'X)$ matrisini $P'X'XP = \Lambda$ biçiminde köşegenleştirir. Λ, elemanları $(X'X)$ matrisinin pozitif öz değerleri $\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_q$ olan $q \times q$ boyutlu köşegen bir matristir (Liski, 1982; Liski, 1983).

$Z = XP$ ve $\alpha = P'\beta$ olmak üzere, eş (1)'deki modelin kanonik formu,

$$Y = XPP'\beta + \varepsilon = Z\alpha + \varepsilon \qquad \textbf{(5)}$$

şeklindedir. Böylece,

$$OHK(\tilde{\beta};C) = OHK(\tilde{\alpha};P'CP)$$

olduğu görülür.

Bir regresyon parametresinin doğrusal kabul edilebilir tahmin ediciler sınıfı kapsamı içindeki $b \in \mathbb{R}^q$ olmak üzere kabul edilebilir doğrusal bir tahmin edici,

$$\tilde{\beta} = A(\hat{\beta} - b) + b \qquad \textbf{(6)}$$

biçimindedir (Rao, 1976). Burada $\hat{\beta}$; β'nın EKK tahmin edicisi, A; $(q \times q)$ boyutlu bir matris ve b; $(q \times 1)$ boyutlu sabit bir vektördür. Bu şekilde gösterilen tahmin ediciler, doğrusal kabul edilebilir tahmin ediciler (linear admissible estimators) sınıfındandır. Bir tahmin edicinin kabul edilebilir (admissible) bir tahmin edici olması için diğer koşullar aşağıdaki gibi sıralanabilir.

$$(X'X)A \text{ veya } A(X'X)^{-1} \qquad \textbf{(7)}$$

simetrik ve A matrisinin öz değerleri [0,1] aralığında olmalıdır.

Eş (6) ve eş (7)'deki koşullara ek olarak, kabul edilebilirlik için A matrisinin simetrik olduğu kabul edilir. A ve $(X'X)$ matrisleri aynı ortonormal P matrisi tarafından köşegenleştirilebilir. $P'AP = \Delta$, elemanları A matrisinin [0,1] aralığına düşen öz değerleri $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_q$ olan $q \times q$ boyutlu köşegen bir matristir (Liski, 1982; Liski, 1983).

Eş (5)'deki model altında eş (6),

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= P'A(\hat{\beta} - b) + P'b \\ &= P'AP(\hat{\alpha} - a) + a \\ &= \Delta(\hat{\alpha} - a) + a \end{aligned} \qquad \textbf{(8)}$$

olur. Burada $\hat{\alpha} = P'\hat{\beta}$, $a = P'b$'dır. Bu tür doğrusal kabul edilebilir tahmin edicileri, Shrinkage tahmin ediciler olarak isimlendirilir (Liski, 1982; Liski, 1983).

2.1 Shrinkage Ve En Küçük Kareler Tahmin Edicilerinin Ortalama Hata Kare Matrisleri

EKK tahmin edicileri $\hat{\beta}$ ve Shrinkage tahmin edicileri $\tilde{\beta}$'nın OHK matrisleri sırasıyla,

$$OHK(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

ve

$$OHK(\tilde{\beta}) = \sigma^2 A(X'X)^{-1}A' + (I - A)(\beta - b)(\beta - b)'(I - A) \qquad \textbf{(9)}$$

dır (Liski, 1982; Liski, 1983). Eş (9)'a eşdeğer olan kanonik formları,

$$OHK(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \Lambda^{-1}$$

ve

$$OHK(\tilde{\alpha}) = \sigma^2 \Delta \Lambda^{-1} \Delta + (I - \Delta)(\alpha - a)(\alpha - a)'(I - \Delta) \qquad \textbf{(10)}$$

biçiminde gösterilir. Bu iki matris arasındaki farkın, yani $OHK(\hat{\beta}) - OHK(\tilde{\beta})$'nın negatif olmayan tanımlı bir matris olması, $OHK(\hat{\beta}) - OHK(\tilde{\beta}) \geq 0$ ile mümkündür. Buradan hareketle $OHK(\hat{\beta}) - OHK(\tilde{\beta})$ farkı, ancak ve ancak,

$$(\beta - b)'(I + A)^{-1} X'X(I - A)(\beta - b)/\sigma^2 \leq 1 \qquad \textbf{(11)}$$

eşitliği sağlandığında negatif olmayan tanımlıdır. Aynı şekilde, $OHK(\hat{\alpha}) - OHK(\tilde{\alpha})$ farkının negatif olmayan tanımlı bir matris olması ise ancak ve ancak,

$$(\alpha - a)'(I + \Delta)^{-1} \Lambda(I - \Delta)(\alpha - a)/\sigma^2 \leq 1 \qquad \textbf{(12)}$$

ile mümkündür (Liski, 1982). Eş (11)'deki koşul altında bir Shrinkage tahmin edicisi olan $\tilde{\beta}$'nın, en az EKK tahmin edicisi $\hat{\beta}$ kadar etkin olduğu söylenebilir.

2.2 Shrinkage Tahmin Edicileri Yardımıyla Ortalama Hata Karelerin Azaltılması

Liski (1982), çalışmasında genel yapısını verdiği Shrinkage tahmin edicilerinin OHK matrisleri ile, bilinen EKK tahmin edicilerinin OHK matrislerini karşılaştırarak bir gereklilik ve yeterlilik koşulu elde etmiştir. Daha sonra bu gereklilik ve yeterlilik koşulunu kullanarak Ridge ve $\hat{\beta}_d = d\mathrm{I}\,\hat{\beta}$, $0 \le d \le 1$ tahmin edicilerinin her biri için gereklilik ve yeterlilik koşullarını oluşturmuştur (Liski, 1982). Bu koşul sağlandığında Shrinkage tahmin edicileri en az, EKK tahmin edicileri kadar etkindir.

Bu çalışmada, Sakallıoğlu ve Kaçıranlar (2005) tarafından önerilen ve bir Shrinkage tahmin edicisi olan Ridge tahmin edicisine dayalı yanlı tahmin edici ele alınarak, bu tahmin edicinin en az, EKK tahmin edicisi kadar etkin olması için gereklilik ve yeterlilik koşulları oluşturulmuştur.

Sakallıoğlu ve Kaçıranlar (2005), Ridge tahminine dayalı yanlı bir tahmin ediciyi,

$$\tilde{\beta}(k,d) = (X'X+\mathrm{I})^{-1}(X'Y + d\tilde{\beta}(k)) \quad \textbf{(13)}$$

şeklinde tanımlamışlardır. Burada $\tilde{\beta}(k) = (X'X+k\mathrm{I})^{-1}X'Y$, Ridge regresyon tahmin edicisidir ve k>0, $-\infty$<d<$+\infty$ olarak tanımlanmaktadır. Eş (13)'da verilen tahmin edici için,

$$(\alpha-a)'\left(\frac{(\Lambda+k\mathrm{I})-d\Lambda}{(\mathrm{I}+k\Lambda^{-1})(\mathrm{I}+2\Lambda)+d}\right)(\alpha-a)/\sigma^2 \le 1 \quad \textbf{(14)}$$

veya

$$(\beta-b)'\left(\frac{(X'X+k\mathrm{I})-dX'X}{(\mathrm{I}+k(X'X)^{-1})(\mathrm{I}+2(X'X))+d}\right)(\beta-b)/\sigma^2 \le 1 \quad \textbf{(15)}$$

biçiminde belirlenen gereklilik ve yeterlilik koşulunun sağlanması durumunda Ridge tahminine dayalı yanlı tahmin edici, en az EKK tahmin edicisi kadar etkindir. Gereklilik ve yeterlilik koşulunun oluşturulması Ekte verilmiştir.

3. SONUÇ

EKK tahmin yönteminde amaç hatayı en küçüklemektir. Ancak, bağımsız değişkenler arasında şiddetli bir ilişki bulunuyorsa, bu tür veriler hatada, dolayısıyla varyansta yanıltıcı bir büyümeye sebep olur. Bu büyüme parametre tahminlerine ve kestirim sonuçlarına olumsuz şekilde yansır. Bu olumsuz etkiyi yok etmek için yanlı tahmin yöntemlerine başvurulur. Bu yöntemler küçük bir yan karşılığı varyans alanını dolayısıyla hatayı küçültür.

Bu çalışmada, varyanstaki büyüme göz önüne alınarak, OHK matrisleri kullanılmış ve bir Shrinkage tahmin edicisi olan Ridge tahminine dayalı yanlı tahmin edicinin en az EKK tahmin edicisi kadar etkin olması için gereklilik ve yeterlilik koşulları oluşturulmuştur. Bu koşullar Ridge tahminine dayalı yanlı tahmin edici için sırasıyla eş (14) ve eş (15)'de verilmiştir. Elde edilen bu koşullar altında bu tahmin edici de, en az EKK tahmin edicisi kadar etkindir sonucu çıkarılmaktadır.

EK

Eş (13)'te verilen Ridge tahminine dayalı tahmin edicide, $\tilde{\beta}(k) = (X'X+k\mathrm{I})^{-1}X'Y$ yerine konduğunda,

$$\tilde{\beta}(k,d) = (X'X+\mathrm{I})^{-1}(X'Y + d(X'X+k\mathrm{I})^{-1}X'Y) \quad \textbf{(16)}$$

sonucu elde edilir. Eş (16)'da gerekli işlemler ve sadeleştirmeler yapıldığında,

$$\tilde{\beta}_{k,d} = (X'X+\mathrm{I})^{-1}(\mathrm{I}+d(X'X+k\mathrm{I})^{-1})X'X\hat{\beta} \quad \textbf{(17)}$$

sonucuna ulaşılır. $P'X'XP = \Lambda$ olduğundan $\tilde{\alpha}_{k,d}$,

$$\tilde{\alpha}_{k,d} = (\Lambda+\mathrm{I})^{-1}(\mathrm{I}+d(\Lambda+k\mathrm{I})^{-1})\Lambda\hat{\alpha}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan, $P'AP = \Delta = (\Lambda+\mathrm{I})^{-1}(\mathrm{I}+d(\Lambda+k\mathrm{I})^{-1})\Lambda$ olmak üzere, Δ terimi eş (12)'de yerine yazıldığında ve gerekli işlemler ile sadeleştirmeler yapıldığında,

$$(\alpha-a)'\left(\frac{(\Lambda+k\mathrm{I})-d\Lambda}{(\mathrm{I}+k\Lambda^{-1})(\mathrm{I}+2\Lambda)+d}\right)(\alpha-a)/\sigma^2 \le 1$$

veya

$$(\beta-b)'\left(\frac{(X'X+k\mathrm{I})-dX'X}{(\mathrm{I}+k(X'X)^{-1})(\mathrm{I}+2(X'X))+d}\right)(\beta-b)/\sigma^2 \le 1$$

eşitsizlikleri elde edilir.

KAYNAKLAR

Akdeniz, F. and Kaçıranlar, S. (1995). On the Almost Unbiased Generalized Liu Estimator and Unbised Estimation of the Bias and MSE. *Communications. in Statistics: Theory and Methods* 24(7), 1789-1797.

Ebegil, M. (2006). Liu-Tipi Ve Ridge Tahminine Dayalı Yanlı Tahmin Edicilerin Shrinkage Tahmin Ediciler Sınıfı Üzerine Bir Çalışma, Sakarya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fen Edebiyat Dergisi 8(2), 53-58.

Ekni, M. (1997). Shrinkage Tahmin Edicileri Sınıfı, *Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fen Bilimleri Dergisi* 7, 13-20.

Farebrother, R. W. (1978). A Class of Shrinkage Estimators. *Journal of the Royal Statistical Society* B 40, 47-49.

Kejian, L., (1993). A New Class of Biased Estimate in Linear Regression. *Communications. in Statistics: Theory and Methods* 22(2), 393-402.

Liski, E. P. (1982). A Test of the Mean Square Error Criterion for Shrinkage Estimators. *Communications in Statistics* 11(5), 543-562.

Liski, E. P. (1983). Choosing a Shrinkage Estimator-a test of the Mean Square Error Criterion. Proc. First Tampere Sem. Linear Models, ss.245-262.

Rao, C. R. (1976). Estimation of Parameters in a Linear Models. *The Annals of Statistics* 4, 1023-1037.

Sakallıoğlu, S., Kaçıranlar, S. ve Akdeniz, F. (1997). Bazı Yanlı Regresyon Tahmin Edicilerinin Karşılaştırılması. Araştırma Sempozyumu'97 Bildirileri, 24-26 Kasım 1997 DİE. Ankara.

Sakallıoğlu, S. ve Kaçıranlar, S. (2005). Yeni Bir Yanlı Tahmin Edici ve Liu-Tipi Tahmin Edici ile Karşılaştırmalar. 4. İstatistik Kongresi, 08-12 Mayıs 2005, Bildiri ve Poster Özetleri Kitabı. Antalya. ss. 250-251.

Theobald, C. M. (1974). Generalizations of Mean Square Error Applied to Ridge Regression, *Journal of the Royal Statistical Society* B 36, 103-106.

Meral EBEGİL, 1994 yılında lisans, 1999 yılında ise yüksek lisans derecelerini Gazi Üniversitesi İstatistik Bölümünden aldı. Halen aynı bölümde kredibilite(credibility) teorisi üzerine doktora eğitimini sürdürmekte olup, araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır. Çalışma alanları doğrusal modeller, yanlı tahmin ediciler ve kredibilite teorisidir.