

## **Didaktik Durumlar Teorisi Işığında İlköğretim Öğrencilerine Matematiksel Süreçlerin Yaşatılması \***

Abdulkadir ERDOĞAN<sup>1</sup>, Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN<sup>2</sup>

### **ÖZ**

Matematiksel süreçler kavramı son zamanlarda programlarda sıklıkla yer verilen fakat net bir tanımına rastlanmayan bir kavram olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu çalışmanın amacı matematiksel süreçler kavramına açıklık getirmek ve ilköğretim öğrencilerine bu süreçlerin nasıl yaşatılabileceği konusunda teori ve uygulama temelli bazı öneriler geliştirebilmektir. Çalışmada matematik eğitimi alanında Guy Brousseau önderliğinde geliştirilmiş olan Didaktik Durumlar Teorisinin prensipleri benimsenmiş ve bu prensipler doğrultusunda tasarlanıp uygulanan bir etkinliğin analizlerine yer verilmiştir. 20 ilköğretim beşinci sınıf öğrencisinin katıldığı etkinlik bir proje çerçevesinde özel olarak tasarlanmış bir sınıf ortamında gerçekleştirilmiş ve yaklaşık 75 dakika sürmüştür. Etkinliğin analizleri Didaktik Durumlar Teorisinin ilköğretim seviyesinde matematiksel süreçlerin yaşatılabilmesi ve öğrencilerin bu süreçlerin merkezinde yer almaları için uygun araçları sunduğunu göstermektedir.

**Anahtar kelimeler:** matematiksel süreçler, didaktik durumlar teorisi, oyun temelli öğrenme, ilköğretim beşinci sınıf.

## **Involving Primary School Students In Mathematical Processes Through Theory of Didactical Situations**

### **ABSTRACT**

Mathematical processes concept is frequently invoked in curricula but no definition is given. The aim of this paper is to clarify what this concept could mean and, to come up with suggestions about how primary school students could get involved in these processes. Theory of didactical situations, which was developed by Brousseau, was used as theoretical framework and the paper focused on the analysis of an activity designed and carried out on the basis of this theory. This activity, which involved 20 fifth grade students (11-12 years old) and lasted about 75 minutes, came from a number of activities carried out in a project and, in an environment specifically designed. The analysis of the activity showed that theory of didactical situations could provide appropriate tools to involve primary school students in mathematical processes while putting them in the centre of these processes.

**Keywords:** mathematical processes, theory of didactical situations, game based learning, fifth grade.

---

\* Bu çalışma TÜBİTAK tarafından desteklenen 107B053 numaralı Eskişehir Matematik Okulu Projesi kapsamında gerçekleştirilmiştir.

<sup>1</sup> Yrd. Doç.Dr., Anadolu Üniversitesi, e-posta: abdulcadirerdogan@anadolu.edu.tr

<sup>2</sup> Yrd. Doç.Dr., Anadolu Üniversitesi, e-posta: eoerdogan@anadolu.edu.tr

## GİRİŞ

Modern dünyanın belirlediği ihtiyaçlar ve yapılandırmacı yaklaşımın yaygınlaşması son yıllarda tüm dünyada eğitim-öğretim anlayışında önemli değişikliklere neden olmuştur. Bu değişikliklerden en çok etkilenen alanlardan birisi de hiç kuşkusuz matematik öğretimidir. Matematik öğretimi programlarının beklentileri incelendiğinde her geçen gün daha çok kavramsal öğrenmelere vurgu yapıldığı, problem çözme sürecinin matematik öğretiminin temelini oturtulduğu, konu ve etkinliklerin günlük hayatla ilişkilendirilmesinin gerekliliğinin vurgulandığı, matematiğin farklı konuları arasında ilişki kurmanın, hatta matematikle diğer branşlar arasında ilişki kurmanın önemi üzerinde ciddiyle durulduğu görülmektedir. Bu beklentilerin son zamanlarda yeni kavramların, öğretim içeriklerinin, yöntem ve stratejilerinin ortaya çıkmasına neden olduğu söylenebilir.

Bu bağlamda son zamanlarda sıkça kullanılan kavramlardan birisi de matematiksel süreçler kavramıdır. Literatürde matematiksel süreçler kavramının net bir tanımına rastlanmamakta, kavramın daha çok aşamalar veya başlıklar şeklinde açıklandığı görülmektedir. Arsac ve diğerleri (1991) matematiksel süreçleri (la démarche mathématique) deneme ve yanılma - hipotez öne sürme - hipotezi test etme - ispatlama şeklinde ardışık dört süreçle açıklamaktadırlar. Van de Walle (2004) bu süreçlerin çoğunu problem çözme sürecine dahil etmekte ve matematiksel süreçleri problem çözme - akıl yürütme - iletme (paylaşma) şeklinde üç aşamada değerlendirmektedir. NTCM (2000) standartlarında Van de Walle'in belirlediği aşamalar daha da çeşitlendirilmekte ve matematiksel süreçler problem çözme - akıl yürütme ve ispatlama - iletme (paylaşma) - ilişkilendirme - temsil etme olarak beş başlık altında tanımlanmaktadır. Ontario (2005) programında ise NTCM standartlarında yer verilen başlıklar korunmakla birlikte üzerinde düşünme - araçları ve hesap stratejilerini seçme şeklinde iki yeni başlığın eklendiği görülmektedir. Bu programda matematiksel süreçlerin öğrencilerin matematiksel bilgi ve becerileri kazanmaları ve kullanmaları için zorunlu süreçler olduğu vurgulanmakta ve süreçler arasındaki ilişkisi üzerinde durulmaktadır. Son olarak matematiksel süreçler kavramının OECD raporlarına girmeye başladığı görülmektedir. OECD (2010) raporunda matematiksel süreçler doğrudan matematik okuryazarlığı kavramı çerçevesinde ele alınmakta ve bu süreçler bir durumu matematiksel olarak ifade etme - matematiksel kavram, olgu, prosedür ve çıkarımları kullanma - matematiksel sonuçları yorumlama, uygulama ve değerlendirme olmak üzere üç süreç şeklinde tanımlanmaktadır. Ayrıca, bu süreçlerin ilişkili olduğu, Ontario programındakilere benzer, yedi kazanım başlığı tanımlanmaktadır.

Her ne kadar kavramın net bir tanımına rastlanmasa da, yukarıda yer verilen aşama ve başlıklardan matematiksel süreçler kavramı ile vurgulanmak istenen olgunun matematikçilerin matematik yaparken şu veya bu şekilde yaşadıkları süreçler olduğu anlaşılmaktadır. Zira, ilk olarak problem çözme eylemi

matematikçilerin temel uğraşı kabul edilmektedir. Fakat matematik tarihi incelendiğinde (Giusti, 1999; Mahammad, 1998; Schoenfeld, 1992) matematikçilerin aktivitesinin sadece problem çözme ile sınırlı kalmadığı ve problem çözme sürecinin de kendi içinde bazı süreçleri barındırdığı görülmektedir. Kısaca açıklamak gerekirse, matematikçiler karşılaşmış oldukları problemleri çözmek için bir düşünce sistemi kurmaya çalışırlar. Problemin çözümü için hipotezler öne sürerler, bazı yöntem ve teknikler uygularlar. Bu yöntem ve tekniklerin başarısız olduğu durumlarda yeni yöntem ve teknik arayışına girerler ve bunları uygulayarak problemlerini çözmeye çalışırlar. Çalışmaları onları bir sonuca ulaştırabilirse bu sonucun doğruluğunu test ederler, gerekli durumlarda kanıtlarlar. Benzer şekilde buldukları ve kullandıkları yöntem ve tekniğin geçerlik alanını test etmeye çalışır, genellemeler ararlar. Son olarak buldukları sonuç, yöntem ve tekniği diğer matematikçilerle paylaşırlar.

Bu durumda, yukarıda yer verilen programlarda matematiksel süreçler kavramı aracılığıyla ulaşılmak istenen kazanımların matematiğin doğasını tanıma, matematiksel bilgileri kazanma ve günlük hayatta karşılaşılan problemlerin çözümünde etkili bir araç olarak kullanma amaçlarıyla ilişkili olduğu anlaşılmaktadır. Bununla birlikte, matematiksel süreçleri konu alan dokümanların sadece öğretmenlere sınıf içi pratikleri ile ilgili bazı tavsiyelerde bulunduğu veya farklı örnekler üzerinde her bir süreci açıklamakla yetindikleri görülmektedir. Sonuç olarak, bu süreçlerin öğrencilere nasıl kazandırılacağı, farklı süreçler arasındaki ilişkinin ve geçişlerin nasıl sağlanacağı, bunları sağlamak için nasıl bir yöntem izlenmesi, nasıl bir eğitim-öğretim ortamı hazırlanması ve nasıl bir içerik tasarlanması gerektiği sorularına cevap verilmemektedir. Bu çalışmada, bu türden sorulara cevap verebilmek için gerekli model ve araçları sunabileceği düşünülen Didaktik Durumlar Teorisi kuramsal çerçeve olarak kullanılmıştır.

### **Didaktik Durumlar Teorisi Işığında Matematiksel Süreçler**

Yapılandırmacı yaklaşımı temel alan Didaktik Durumlar Teorisinin (DDT) (Brousseau, 1997) çıkış noktasını matematik öğretilen ortam ve durumların öğrencilere kendi bilgilerini oluşturmalarına imkan verecek şekilde tasarlanmasının gerekliliği oluşturmaktadır. Bu bakış açısıyla teorinin temel bileşenini *adidaktik durum* kavramı oluşturmaktadır. Buradaki durum kavramı Dewey'in öne sürdüğü durum kavramından farklılık göstermektedir. Zira Dewey'in bahsettiği durum kavramı bireyin bir eylem ve çözüm arayışı içinde olduğu her hangi bir bağlamı ifade ederken (Chatel, 2002) DDT'deki durum kavramı öğretmen tarafından belirli öğrenmelerin gerçekleşmesi için bilinçli bir şekilde tasarlanmış öğrenme bağlamı anlamına gelmektedir (Sensevy vd. 2005). Adidaktik sıfatı ise, öğretmenin öğretme amacının ve öğretim içeriğinin açıkça belli olduğu didaktik durumlardan farklı olarak (örneğin, "bugünkü konumuz üçgenlerde açılar" şeklinde başlayan bir ders didaktik bir durum olarak nitelendirilebilir), öğretmenin amacını ve hedeflediği kazanımları öğrencilerden belirli bir süreliğine dahi olsa gizlediği ve öğrencilerin öğretmenin müdahale ve yönlendirmelerinden bağımsız olarak bir eylem ve araştırma içinde

bulunmalarına fırsat tanıyan durumu nitelemektedir (Warfield, 2006). Öğrenme durumuna bu adidaktik özelliğin verilmesi özellikle oyun bağlamında sağlanmaktadır. Brousseau'nun tanımında yer alan oyunlar gelişigüzel oyunlar olmayıp, oyun teorisinde tanımlandığı şekilde (Ross, 2008; Thisse, 2010) kaybetme ve kazanma ihtimali olan fakat kazanmanın ancak optimal stratejilerin üretilmesiyle mümkün olduğu oyunlardır. Brousseau adidaktik durum sonunda ortaya çıkacak bilgiyi oyunu kazanmayı sağlayacak stratejileri üretmeyi sağlayan araçlar olarak nitelendirmektedir ve bu bakış açısı matematikçilerin karşılaşmış oldukları problemleri çözmek için kendi araçlarını geliştirmeleri prensibiyle birebir örtüşmektedir.

Daha net bir ifadeyle, oyun teorisinde karşılıklı iki kişi veya iki ekip arasındaki bir oyunun amacı kazanmaktır ve kazanmanın temel kuralı bunun için kazanmayı sağlayacak stratejiler geliştirmektir. Karşılıklı oyun oynayan iki kişi veya ekip bilerek kaybetmeyi istemeyen, kazanmak için stratejiler geliştiren, onları uygulamaya koymaya çalışan, rakibinin stratejisi ve tutumuna göre stratejisini değiştiren, geliştiren, ya da geri çeken kişi veya ekiptir. Söz konusu oyunun kuralı ve doğasına göre sözlü, yazılı veya materyal aracılığıyla etkileşime dayalı olabilecek bütün bu stratejiler oyuncular ve ekipler arasında karşılıklı etkileşim oluşturur ve bu etkileşimlerin gelişim süreci oyunun sonucunu belirler. Oyuncular veya ekipler için oyunun kurallarına uymak bir zorunluluktur ve sadece oyunun kurallarına uygun stratejiler geçerli strateji olarak görülmek zorundadır. Oyunun kuralları ve karşı oyuncu veya ekibin stratejileri her aşamada diğer oyuncuya dönüt veren bir sistem oluşturur. Teoride bu sistem adidaktik ortam (adidaktik milieu) olarak adlandırılmakta olup oyunu kazandıran stratejiler bu ortam ile etkileşim içinde planlanmak zorundadır.

Matematik aktivitesine de bu oyun metaforu ile bakıldığında, bir problem, bir öğrenci, herhangi bir kişi veya bir ekip için bir oyuna davet, bir meydan okuma olarak görülebilir. Bu kişi veya kişilerin ilk görevi problemi doğru anlamak ve problemin yönergesine uyararak problem durumunu yaşamayı kabul etmektir. Başka bir ifadeyle bu görev problemin yönergesi çerçevesinde kalarak probleme çözüm üretme bireysel veya grup sorumluluğunu üstlenmek demektir. Problemi öneren kişinin, örneğin öğretmenin, ilk görevi de problemin kurallarının problemi çözmesi beklenen kişiler tarafından iyi anlaşıldığından ve problemi çözme sorumluluğunu üstlendiklerinden emin olmaktır. Problem çözümlerinin, problemi öneren kişinin amaç ve müdahalelerinden bağımsız olarak hareket edebilmelerinin temel şartı olan bu ilk aşama teoride sorumluluk aktarma (devolution) aşaması olarak adlandırılmaktadır<sup>3</sup>. Sorumluluk aktarma aşamasının etkin biçimde gerçekleşmesi her şeyden önce öğretmen ile öğrenciler arasındaki karşılıklı beklentilerin iyi anlaşılmasıyla mümkündür. Eğitim-

<sup>3</sup> Kavramların Türkçe çevirileri yapılırken teoride taşıdıkları anlamlarının daraltılmaması ve okuyucunun yanlış yönlendirilmemesi için mümkün olduğunca orjinal dildeki kelimelere yakın kelimeler seçilmeye çalışılmıştır. Örneğin, *devolution* kelimesi Brousseau'nun ana dili olan Fransızca'da bir malı veya mirası bir başkasına aktarma veya devretme anlamına gelmektedir ve çeviride *aktarma* veya *devretme* anlamı içermeyen bir kelimenin tercih edilmesinin anlam kaymasına neden olabileceği düşünülmüştür.

öğretimin temel bileşenlerinden biri olan bu karşılıklı beklenti ve sorumluluklar bütünü *didaktik sözleşme (didactic contract)* olarak adlandırılmaktadır. Didaktik sözleşme yazılı kuralları olan bir sözleşme olmayıp, süreç içinde yerleşen, bilgideki ilerlemeyle ve kurumsal beklentilerle gelişen ve değişen bir sistemdir. Örneğin, bir öğretmenin kesirlerde toplamayı öğretirken  $a+(b/c)$  gibi bir işlemde a'nın paydasını bir kabul etmelerini beklerken ilerleyen aylarda buradaki işlemi  $(ac+b)/c$  şeklinde hızlıca yapmalarını istemesi didaktik sözleşmeyle ilgili bir durumdur. Bir problemi çözecek kişi veya grubun sorumluluk aktarma aşamasından sonra yaşayacağı ilk adidaktik durum *eylem (action)* durumudur. Eylem durumu kişi veya grubun ilk hamlelerle, deneme ve yanılgılarla problemi çözmeye başlamasından bazı çözümlerin bulunmasına kadar devam eden süreçtir. Bu süreç boyunca pek çok çıkmazlarla karşılaşılabilir, yanlış stratejiler kurulabilir. Bir de eğer ortamda (*milieu*) bir karşı ekip var ise, karşı ekipten gelecek etkileşimin de dikkate alınması, ona göre stratejilere yön verilmesi gereklidir. Bir sonraki adidaktik durum *formüle etme (formulation)* durumudur. Eylem durumunda ortaya çıkan muhtemel stratejiler henüz bir matematik önermesi statüsünde olmadığından, yani bir kural olarak ifade edilmediğinden, formüle etme durumu kazanan ya da kaybeden stratejilerin kişi veya ekip tarafından enine boyuna irdeleneceği bir süreçtir. Formüle etme durumu takip eden adidaktik durum *doğrulama (validation)* durumudur. Doğrulama durumu eylem durumunda bulunan ve formüle etme durumunda uygun bir dille ifade edilen matematiksel önermelerin açık bir şekilde doğrulanması ve çürütülmesi sürecidir. Teoride bu üç adidaktik durumu (eylem-formüle etme-doğrulama) etkinliğin gerisindeki matematik bilgisine öğretmen eşliğinde kurumsal bir statü verildiği bir süreç olan *kurumsallaştırma (institutionnalisation)* süreci, kurumsallaştırma sürecini ise ortaya çıkan matematik bilgisinin geçerlik ve uygulama alanlarının test edildiği *bağlamdan çıkarma (décontextualisation)* süreci izlemektedir.

Bugün, öğrencileri öğrenmelerin merkezine oturtmaya çalışan ve DDT tarafından önerilen yukarıdaki aşamalara benzer aşamalar öneren başka teori veya modellere rastlamak mümkündür. Örneğin 5E modelinin (Bybee vd., 2006) içerdiği aşamaların DDT'nin aşamalarına oldukça yakın olduğu söylenebilir. Burada bir karşılaştırmaya gitmeksizin, DDT'nin en belirgin özelliğini adidaktik ortam tasarımıyla aldığını söylemek mümkündür. Adidaktik ortam tasarımı, öğrenme ortamının parametrelerinin öğretmenin bilgi ile ilgili müdahalelerini en aza indirgeyecek şekilde belirlenmesini gerektirmektedir. Bunun için önerilecek problem durumunun titizlikle seçilmesi (muhtemel çözüm stratejilerinin incelenmesi, oyun bağlamının iyi kurgulanması, içerdiği ifadelerin, sayısal değerlerin ve diğer bilgilerin hedeflenen kavrama öğrencilerin ulaşmasını sağlayacak şekilde belirlenmesi), ortamda başka hangi elemanların bulunacağına ve bunların niteliklerine karar verilmesi (örneğin, bir geometri etkinliğinde öğrencilere ölçekli veya ölçeksiz cetvel verme seçimi) ve bu ortamın yukarıda belirtilen her bir aşamada nasıl değişeceğinin ve gelişeceğinin tasarlanması büyük önem taşımaktadır.

Literatürde yer aldığı şekliyle matematiksel süreçler kavramı DDT ışığında düşünüldüğünde süreçler arası bazı ilişkilendirmeler yapmak mümkündür. Aşağıdaki tabloda böyle bir ilişkilendirmeye yer verilmiştir.

Tablo 1. *DDT Işığında Matematiksel Süreçler*

<i>DDT</i>	<i>Literatürdeki Matematiksel Süreçler</i>
Eylem	Deneme-yanılma, araçları ve hesaplama stratejilerini seçme, problem çözme
Formüle etme	Hipotez kurma, temsil etme, bir durumu matematiksel olarak ifade etme
Doğrulama	İspatlama (hipotezi test etme), akıl yürütme, iletme ve paylaşma
Kurumsallaştırma	Matematiksel sonuçları yorumlama, uygulama ve değerlendirme
Bağlamdan çıkarma	İlişkilendirme

Sonuç olarak, DDT'nin matematiksel süreçleri sistemli bir şekilde ele aldığı ve bu süreçlerin öğrencilere kazandırılması için uygun bir çerçeve oluşturduğu düşünülmektedir.

### **Araştırmanın Amacı**

Bu araştırmanın amacı DDT ışığında matematiksel süreçlerin ilköğretim öğrencilerine nasıl yaşatılabileceğini araştırmaktır. Bu amaca bağlı olarak çalışmada şu sorulara cevap aranmaktadır. DDT'ye göre tasarlanmış bir öğrenme ortamında;

- Öğrenciler hangi matematiksel süreçlerle karşılaşmaktadırlar?
- Öğrenciler karşılaşmış oldukları matematiksel süreçlerde ne tür eylemler ve sonuçlar ortaya koymaktadırlar?

Ülkemizde 2005 yılından beri uygulanmakta olan ilköğretim matematik programı incelendiğinde, matematiksel süreçler terimi açıkça kullanılmamakla birlikte yukarıda açıklanan süreçlerin pek çoğuna yer verildiği görülmektedir. Özellikle, problem çözme süreci ve bu sürece eşlik eden kazanımlar detaylı bir şekilde ele alınmakta, matematik diline, matematiksel ilişkilendirme, iletişim ve paylaşma büyük önem verilmektedir. Bu bağlamda, söz konusu çalışmanın mevcut programın daha etkin biçimde uygulanabilmesine yönelik fikir verebilecek veya uygulanmasında karşılaşılan güçlüklerin nedenlerini daha iyi anlamayı sağlayacak nitelikte olduğu düşünülmektedir.

## **YÖNTEM**

Bu çalışmanın verileri TÜBİTAK tarafından desteklenen ve amaçlarından bir tanesi ilköğretim öğrencilerine matematiksel süreçleri yaşatmak olan bir proje çerçevesinde toplanmıştır (Erdoğan vd., 2012). Proje için bir ilköğretim okulunun ek binası kullanılmış ve iki yıl boyunca çoğunluğu DDT'ye göre tasarlanmış etkinlikler uygulanmıştır. Etkinlikleri gerçekleştirmek üzere görev alan öğretmenlere proje başında bir eğitim verilmiştir. Yaklaşık 20 saat süren bu

eğitimde projenin amaç ve içeriği, DDT'nin temel prensipleri ve aşamaları tanıtılmıştır. Ayrıca tasarlanan etkinlikler öğretmenlere sunulmuş, öğrencilerin gösterecekleri muhtemel davranışlar, çözüm yaklaşımları ve karşılaşılabilecek güçlükler beraberce tartışılmıştır. Etkinliklerin nasıl yönetileceği ve etkinliklerde öğretmenin rolü DDT ışığında beraberce incelenmiştir. Bununla birlikte, öğretmenlere her bir etkinlik için aşama aşama uygulayacakları sabit, yazılı bir yönerge veya doküman verilmemiş ve kendi öğretmenlik deneyimleriyle eğitimin içeriğini harmanlamaları beklenmiştir. Etkinliklerde öğrenci-öğretmen etkileşiminden daha çok öğrenci-öğrenci etkileşimini sağlamak ve sınıfta DDT'de benimsendiği şekliyle bir matematikçiler topluluğu oluşturmak için grup çalışması yöntemine başvurulmuştur.

Bu çalışma söz konusu proje çerçevesinde uygulanan bir etkinlik üzerine kurulmuştur. Etkinlik, öğretmenlerin projeye adapte olma süreleri dikkate alınarak, projenin ortalarına doğru gerçekleştirilen etkinlikler arasından rastgele seçilmiştir. Söz konusu etkinlik Brousseau'nun çalışmalarında da yer alan "Kim önce 20 diyecek?" isimli ve oyun temelli bir etkinliktir. Etkinlik beş yıllık mesleki deneyimi olan bir ilköğretim matematik öğretmeni tarafından yürütülmüştür. Etkinliğin katılımcıları ise şehir merkezindeki bir ilköğretim okulunun 20 beşinci sınıf öğrencisidir.

Çalışmanın verileri etkinlik uygulamasının ses ve video kayıtlarından oluşmaktadır. Yaklaşık 75 dakika süren etkinliğin kayıtlarının öncelikle dökümü yapılmıştır. Daha sonra bu dökümler iki araştırmacı tarafından DDT'nin aşamalarına göre ayrı ayrı analiz edilmiştir. Son olarak tüm etkinlik bu iki araştırmacı tarafından video ve dökümler eşliğinde beraberce analiz edilmiştir. Bu analizler sırasında her bir aşamanın nasıl başladığı, geliştiği ve sonlandığı öğretmen-öğrenci ve öğrenci-öğrenci etkileşimleri dikkate alınarak belirlenmiş ve bu aşamalarda yaşanan matematiksel süreçlere odaklanılmıştır. Özellikle sınıf içi etkileşimin en yoğun olarak yaşandığı doğrulama süreci detaylı incelenerek öğrencilerin stratejilerinin nasıl geliştiği, bu stratejilerin nasıl doğrulandığı veya çürütüldüğü belirlenmeye çalışılmıştır. Bu aşamada Brousseau'nun (1997) belirlediği ispat türlerine göre bir sınıflama yapılmıştır. Brousseau ilköğretim seviyesinde öğrencilerin üç tür ispata başvurabileceklerini belirtmektedir. Bunlar, mantıksal çıkarımlara dayalı *entelektüel ispat*, bağlamdan anlam çıkarmaya dayalı *semantik ispat* ve deneysel sonuçlara dayalı *pragmatik ispat*. Çalışmanın verileri, öğrencilerin ve öğretmenin davranışlarını etkileme ihtimali olan faktörler (ontolojik faktörler, pedagojik faktörler ve didaktik faktörler) göz önünde bulundurularak yorumlanmış ve böylece DDT'nin matematiksel süreçlerin ilköğretim öğrencilerine yaşatılması için ne derece uygun olduğu daha net bir şekilde saptanmaya çalışılmıştır.

### **"Kim Önce 20 Diyecek?" Etkinliğinin Tanıtımı ve Kısa Bir Analizi**

Bir oyuncu 1 veya 2 diyerek oyuna başlar (1 dediğini kabul edelim). Diğer oyuncu rakibinin söylediği sayıya 1 veya 2 ekleyebilir (yani 2 veya 3 diyebilir). Oyuncular bu şekilde bir birlerinin söyledikleri sayıya 1 veya 2 ekleyerek yeni bir sayı söylerler. İlk önce 20 sayısını söyleyebilen oyuncu oyunu kazanır.

Oyunun gerisindeki matematiksel bilgi Öklid bölmesidir. 20 sayısı 3'ün 6 katının 2 fazlası olduğundan, oyunu kazanmak için her defasında 3'ün herhangi bir katının 2 fazlasına eşit olan sayıları söylemek gerekmektedir. Yani 2, 5, 8, 11, 14 ve 17 sayılarını aksatmadan söyleyebilen oyuncu oyunu kesinlikle kazanır. Bu oyunun Öklid bölmesi dışında bir başka amacı Brousseau (1997) tarafından “öğrenciler tarafından bir dizi teoremin keşfedilmesi ve ispatlanmasını sağlamak” (s.3) olarak açıklanmaktadır. Bu amaç söz konusu oyunu kavram öğretimi etkinliğinin ötesine taşımakta ve matematiksel süreçleri ön plana çıkarmaktadır.

DDT'nin prensipleri, Brousseau'nun uygulamaları ve projenin amacı dikkate alınarak etkinliğin uygulaması genel olarak şu şekilde öngörülmüştür: Öğretmen oyunu sınıf karşısında bir kaç öğrenciyle oynar. Sonra, yine sınıf karşısında öğrencilerin karşılıklı oynamalarına izin verir ve tüm sınıfın oyunun kuralını anladığından emin olmaya çalışır. Daha sonra sınıfı gruplara ayırır, etkinliğin amacını oyunu kazanmak için hipotez öne sürmek ve bu hipotezleri doğrulamak veya çürütmek olarak açıklar. Gruplar arası rekabeti sağlamak için hipotez öne süren, hipotezi ispatlayan veya çürüten her bir gruba bir veya iki puan vereceğini açıklar. Kendisi grup içi ve gruplar arası etkileşimi organize eder, öğrencilerin hipotez ve ispatlarını tahtaya yazar. Etkinliğin sonunda, belirli bir bilgiyi kazandırmak amacı güdümediğinden öğretmen oyun ile Öklid bölmesi arasındaki ilişkiyi kurup kurmamakta serbesttir, fakat isterse öğrencilerin araştırma ve keşfetme isteklerini oyunun kuralını değiştirerek tetiklemeye devam edebilir (Örneğin, kim 20 değil kim 32 diyecek oyunu oynama, rakibinin söylediği sayıya 1 veya 2 ekleme değil, 1, 2 veya 3 ekleme olasılığını getirme...)

## ETKİNLİĞİN ANALİZİ ve BULGULAR

**Sorumluluk aktarma süreci:** Uygulama öğrencilerin sınıfa alınması, 5 masa etrafında dörderli gruplar şeklinde oturtulması ve öğretmenin oynayacakları oyunu tanıtmalarıyla başlamıştır. Öğretmen oyunun adını ve kuralını belirterek tahtaya not etmiştir. Sonra oyunu 3 gönüllü öğrenci ile arka arkaya, diğer öğrencilerin de duyabileceği ve görebileceği şekilde oynamıştır. Burada öğretmen üç oyunda da kazandıran sayıları söyleyerek oyunu kazanacak şekilde oynamıştır. Sonra öğretmen öğrencilerden oyunu grupları içinde oynamalarını istemiştir. Öğrenciler grup içinde oyunu bir kaç kez oynadıktan sonra öğretmen oyunun amacına tekrar dönerek şu açıklamayı yapmıştır:

**Öğretmen:** Şimdi dinleyelim. Her oyunda amacımız nedir? Oyunu kazanmak değil mi?

**Bir öğrenci:** Hep oyun oynayalım.

**Öğretmen:** (*Gülerek*) Hep oyun oynayacağız. Amacımız oyunu kazanmak ve kazanmak için de bu oyunu kazandıran mutlaka stratejiler vardır demi, yani ben hangi sayıları söylersem bu oyunu kazanırım. Bu oyunun stratejisini ya da kazandıran sayıları bulmaya çalışacağız. Bunun için de fikirler öne süreceğiz. İleri sürdüğümüz fikirler doğru ya da yanlış olabilir. Eğer ortaya attığımız fikri savunur ve doğrularsanız iki puan, eğer karşı gruplardan biri bu fikre katılmayıp ben bunu çürütebilirim derse ve çürütürse o grup da bir puan kazanacak tamam mı? (*Öğretmen puanlamayı aynı zamanda tahtaya not eder.*)



Bu açıklamadan sonra öğretmen öğrencilerden grupları için birer isim belirlemelerini istemiş ve grup isimlerini alınacak puanları altlarına not etmek için tahtaya yazmıştır. Öğretmen bunun hemen ardından öğrencilere “aklınıza gelen bir sayı var mı? Fikirler öne süreceğiz” şeklinde bir açıklamada bulunmuştur. Bir öğrencinin grup sırasına göre fikirlerin söylenmesini önermesi üzerine öğretmen gruplardan fikirlerini almaya başlamıştır. Öğrencilerin hemen “11” veya “15” gibi sayıları söylemesi üzerine öğretmen “peki çocuklar henüz herhalde tam olarak oyun kavranmadı, şöyle yapalım” diyerek oyunun iki grup arasında oynanmasını önermiştir. Oyun iki farklı gruptan seçilen iki öğrenci arasında diğer öğrencilerin de duyabileceği ve görebileceği şekilde iki defa oynanmıştır.

**Eylem süreci:** Eylem sürecinin sorumluluk aktarma sürecine paralel şekilde geliştiği görülmüştür. Bu süreç öğrencilerin oyunu gruplar içinde oynamasıyla başlamış ve farklı gruplardan iki öğrencinin oyunu oynamasıyla son bulmuştur. Grup içi oyunlarda öğretmen sınıfta dolaşarak öğrencileri farklı grup arkadaşlarıyla oynamaları için teşvik etmiştir. Gruplar arası oynanan iki oyunda ise tüm öğrencilerin oyuncuların hamlelerini dikkatlice takip ettikleri görülmüştür.

**Formüle etme süreci:** Bu sürecin bağımsız bir süreç olarak gerçekleşmediği görülmüştür. Farklı gruptan öğrenciler arasında oynanan ikinci oyunda “17” ilk kazandıran sayı olarak ortaya çıkmış ve bir *hipotez* olarak ifade edilmiştir (Etkinlik boyunca öğretmen ve öğrenciler *fikir* veya *fikir öne* sürme kelimelerini kullanmışlardır. Bu fikirlerden açıkça öne sürülenler *hipotez* olarak nitelendirilmiştir). Böylece bir sonraki aşama olan doğrulama aşamasına geçilmiştir. Bu geçiş tam olarak şu şekilde gerçekleşmiştir:

**Öğretmen:** Peki oyuna devam edelim. Başka kim oynamak istiyor? Bu arada çocuklar oyuna dikkat edin, herkes oyunu dikkatlice dinlesin (*öğretmen tarafından ikinci gruptan Elif ve üçüncü gruptan Dilara seçilir*)

Dilara	1	4	6	10	12	14
Elif	2	5	8	11	13	15

**Dilara:** 16, hayır! Hayır! 17

**Elif:** 17

**Dilara:** ilk ben dedim, sen 1 veya 2 ekleyeceksin...sen ya 18 ya 19 diyeceksin (*gülerek*)

**Elif:** ...(*Öğrenci seçim yapmak istemez*)

**Öğretmen:** İki şansın var dimi ya 18 ya 19 diyeceksin

**Ayşe (Elif'in grup arkadaşı):** Ama öğretmenim ikisini de dese Dilara kazanıyor

**Öğretmen:** (*gülümseyerek*) ikisini de derse kazanamıyor

**Ayşe:** 17 dedikten sonra hep karşı taraf kazanıyor

**Öğretmen:** Yani 17 diyen kazanır. Neydi grubumuz, bulutlar grubumuzun bir fikri var, fikirlerinizi tahtaya yazalım (*sınıftan uğultular yükselir*).

**Doğrulama süreci:** Etkinliğin dokuzuncu dakikasından itibaren doğrulama sürecine geçiş yapılmış ve bu süreç yaklaşık bir saat kadar sürmüştür. Bu aşamada öğrenciler toplam 13 hipotez öne sürmüş, bunları ispatlamaya veya çürütmeye çalışmışlardır.

Tablo 2. *Doğrulama Aşamasında Öne Sürülen Hipotezler*

Zaman (dk)	Hipotez numarası	Hipotez
8:50	H1	17 diyen kazanır
10	H2	İlk başlayan kazanır
13:42	H3	Tek sayıları söyleyen kazanır
17:38 / 18:42	H4	7 diyen kazanır
22:37	H5	2 diyen kaybeder
23:17	H6	15 diyen kaybeder
23:33	H7	16 diyen kaybeder
27:24	H8	14 diyen kazanır
30:40 / 35:22	H9	Geriye doğru 3'er 3'er sayan kazanır
31:25	H10	16 diyen kazanır
36:38	H11	11 diyen kazanır
42:47 / 50: 32	H12	8 diyen kazanır
27:42 / 62:51	H13	5 diyen kazanır

Tablo 2'de görüldüğü üzere, 17 sayısı etkinliğin başında ilk kazandıran sayı olarak ortaya çıkmış fakat hemen ardından öğrenciler yanlış hipotezler öne sürmeye başlamışlardır (H2, H3, H4 ve H5). Diğer yandan öğrenciler belirli bir aşamadan sonra kaybettiren sayılara odaklanmış, yani söylendiğinde oyunun kaybedileceği sayılar hakkında hipotez öne sürmeye başlamışlardır (H6, H7). Bu hipotezler doğru olmakla birlikte oyunun amacı dışındaki hipotezlerdir. 17'den sonraki diğer kazandıran sayıların (H8, H11, H12 ve H13) yavaş yavaş ortaya çıktığı ve ispatlandığı görülmektedir. Özellikle, 17'den sonra 14'ün ortaya çıkmasının ve ispatlanmasının 20 dakikaya yakın bir süre, 11'in de yaklaşık 15 dakika gibi bir süre gerektirdiği görülmektedir.

Tablo 3. *Oyunların Dağılımı*

	Ö-Ö	Ö-Öt	T		Ö-Ö	Ö-Öt	T	
<b>EB</b>	2	3	5	<b>H8</b>	3	-	3	<b>Ö-Ö: Öğrenci-öğrenci</b>
<b>H1</b>	-	-	-	<b>H9</b>	-	-	-	<b>Ö-Öt : Öğrenci-Öğretmen</b>
<b>H2</b>	2	-	2	<b>H10</b>	1	1	2	<b>T : Toplam</b>
<b>H3</b>	2	1	3	<b>H11</b>	4	3	7	<b>EB : Etkinliğe başlangıç</b>
<b>H4</b>	2	-	2	<b>H12</b>	3	1	4	<b>H1...H13 : Hipotezleri</b>
<b>H5</b>	-	-	-	<b>H13</b>	-	-	-	<b>ispatlamak veya çürütmek</b>
<b>H6</b>	1	-	1	<b>HÖ</b>	3	-	3	<b>HÖ : Hipotez öne sürme</b>
<b>H7</b>	1	-	1	<b>Toplam</b>	24	9	33	

Etkinlik boyunca oyun tüm sınıfın duyabileceği ve görebileceği şekilde toplam 33 defa oynanmıştır (Tablo 3). Bu oyunlardan ilk üçü öğretmen ve öğrenciler arasında sorumluluk aktarma aşamasında, 2'si öğrenciler arasında eylem aşamasında ve üçü doğrulama aşamasında öğretmenin önerisi üzerine yeni bir hipotez önerebilmek için oynanan oyunlardır. Geriye kalan 25 oyun ise hipotezleri ispatlamak veya çürütmek için oynanmış oyunlardır. Bu 25 oyundan

6'sı öğretmenin doğrudan bir öğrenciye karşı oynadığı oyunlardan oluşmaktadır. Buradan şu bulgulara ulaşılmaktadır:

- Dört hipotez için oyuna hiç başvurulmamıştır. Bunlardan ikisi eylem aşamasının hemen sonunda ortaya çıkan “H1:17 diyen kazanır” ve oyunun sonunda ortaya atılan “H13: 5 diyen kazanır” hipotezler olup öğrencilere açıklama yaparak doğrulanması güçlük doğurmayan hipotezlerdir. Diğer ikisi öğretmenin erteleme gereği duyduğu “H5:2 diyen kaybeder” ve “H9:Geriye doğru üçer üçer sayan kazanır” hipotezleridir.
- En çok oyun gerektiren hipotez “H11:11 diyen kazanır” hipotezi olup, sınıfça kabul edilmesi için öğrenciler arası dört oyun ve öğrencilerle öğretmen arası 3 oyun gerekmiştir. Diğer kazandıran hipotezler olan sekizinci ve on ikinci hipotezler için de sırayla üç ve dört oyun gerekli olmuştur.

Hipotezler için geliştirilen ispatların doğasına gelince, Brousseau'nun (1997) belirlediği ispat türlerine göre (entelektüel ispat, semantik ispat ve pragmatik ispat), Brousseau'nun kendi verdiği örnekler ve bu çalışmada ortaya çıkan öğrenci argümanlarından örnekler tablo 4'de sunulmuştur.

Tablo 4. *İspat Türleri*

İspat türleri (Brousseau,1997)	Öğrenci argümanları
<i>Entelektüel ispat:</i> “Ben 17 dersem kazanırım çünkü rakibim 18 veya 19 demek zorunda ve her iki durumda da ben 20 derim”	- Ama öğretmenim ikisini de dese o ( <i>diğer gruptaki için</i> ) o kazanıyor. 17 dedikten sonra hep karşı taraf kazanıyor. 17 den sonra ya 18 demesi lazım ya da 19 demesi lazım, sıra atlamadığı için yani hep ilk 17 diyen kazanır - 5 diyen kazanır ama 11 14 17 diye yani bir tek 5 deyip kaybetme olmayacak yani ötekileri 11 14 17 yi de söyleyecek yani başka şeyler söylerse kaybeder - Öğretmen: Niye 14 diyen kazanır? Öğrenci:14 dedikten sonra 15 veya 16 demek zorunda kalıyor. 15 derse kaybedecek 16'yı göze alıyor, 16 derse de kaybedecek. Birinden birini diyecek, öteki tarafta ...
<i>Semantik ispat:</i> “15 dersem kaybederim çünkü hep 15 deyince kaybettim”	- İlk başlayan kazanır. Öğretmenim çünkü Derya arkadaşımız başladı, o kazandı.
<i>Pragmatik ispat:</i> “14 dersem kazanırım, ispatı, oynayalım, kazanacağım”	- Öğretmenim 11'i kabul etmiyoruz. Sizi yeneceğim, ben başlayayım.

Bir hipotezin ispatı sırasında öğretmenin yönlendirmesi ya da öğrencilerin istekleri ile iki farklı ispat türünün kullanıldığı durumlar da görülmüştür. Tablo 5 hipotezler için hangi ispatlara başvurulduğunu ve bir ispat türünden diğerine geçiş olan durumları temsil etmektedir.

Tablo 5. Hipotezler ve İspat Türleri

	H1	H2	H3	H4	H6	H7	H8	H10	H11	H12
Semantik ispat		●								
Pragmatik ispat		●	●	●		●	●	●	●	●
Entelektüel ispat	●					●	●	●	●	

Tablo 5’ten dokuz hipotezin ispatında pragmatik ispat kullanıldığı, yani oyunu oynayarak ispatın yapıldığı ve beş hipotezde entelektüel ispat verildiği görülmektedir. Öğretmenin yanlış olan hipotezler için entelektüel ispat veren öğrencileri pragmatik ispata yönlendirdiği, (H2, H7 ve H10), doğru ve beklenen hipotezler için (H1, H8 ve 11) tam tersine oyundan sonra entelektüel ispat aradığı görülmektedir. Semantik ispat durumu sadece “ilk başlayan kazanır” hipotezinde ortaya çıkmış olup, öğretmen tarafından hipotezi ortaya atan öğrenci pragmatik ispata yönlendirilmiştir.

**Kurumsallaştırma süreci:** Oyunun amacı kazandıran sayıları veren bir algoritmayı keşfetmek değil öğrencilere matematiksel süreçleri yaşatmak olduğundan bu aşamada öğretmen sadece kazandıran sayılar arasında var olan örüntüyü öğrencilere onaylamakla yani H9’u hatırlatmakla yetinmiştir.

**Öğretmen:** Arkadaşınız diyor ki eğer ben 3-3 gidersem oyunu kazandıran sayıları bulmuş olurum. Yani 20’den 17 sonra (tahtada yazmış olduğu sayılar arasındaki 3 er farkı yanlarına not eder) [...] 17, 14, 11, 8, 5, 3 diyen oyunumuzu kazanır.



**Bağlamdan çıkarma süreci :** Öğretmen oyunu etkinlikteki bağlamın ötesine taşımak için “Kim önce 32 diyecek?” oyununu kazandıran sayıları öğrencilere sormuştur. Bu aşamada öğrencilerin “Kim 20 diyecek?” oyununda kurdukları stratejiyi yeni oyuna uygulayamadıkları, diğer bir deyişle stratejiyi hemen genellemedikleri gözlemlenmiştir. Zaman yetersizliğinden dolayı, etkinlik bu yeni oyununun önerilmesinden çok kısa bir süre sonra sona erdirilmiştir.

## TARTIŞMA ve SONUÇ

“Kim önce 20 diyecek?” etkinliğinin uygulandığı bir dersin DDT'nin aşamalarına göre analizi ve bulguları incelendiğinde her bir aşamada farklı matematiksel süreçlerin yaşandığı görülmektedir. Etkinliğin hemen başında eylem sürecinden itibaren öğrenciler kendilerine önerilen oyunu oynamak için istekli davranmışlar ve temel bir matematiksel süreç olan “deneme-yanılma” stratejisiyle oyunu kazanmaya çalışmışlardır. Bu deneme-yanılma stratejisi aralıklarla etkinliğin ilerleyen aşamalarında da görülmekle birlikte öğrenciler zamanla deneme-yanılma sürecinden uzaklaşarak farklı matematiksel süreçlerin içine sürüklenmişlerdir. Bu süreçlerden bir tanesi formüle etme sürecinin temelini oluşturan “bir durumu matematiksel olarak ifade etme” sürecidir. Her ne kadar, formel bir ayırım yapıldığında formüle etme sürecinin kısa sürdüğü görülsede, öğrencilerin tüm etkinlik boyunca kazandıran (veya kaybettiren) sayılar üzerine hipotezler geliştirdikleri görülmektedir. Etkinlik boyunca en öne çıkan matematiksel süreç ise doğrulama sürecinin temelini oluşturan ispat sürecidir. Yukarıda yer verilen analiz ve bulgulardan, neredeyse tüm sınıfın yoğun bir ispat süreci yaşadığını söylemek mümkündür. Bu ispat süreci kolektif ortamda geliştiğinden yine öğrencilerin yoğun bir şekilde matematiksel iletişim ve paylaşım içinde buldukları söylenebilir.

Etkinlik toplamda 33 defa oynanmış, 13 hipotez ortaya atılmış ve bu hipotezler doğrulanmaya veya çürütülmeye çalışılmıştır. Hipotezlerin lineer bir şekilde ortaya çıkmadığı görülmüştür. Başka bir ifadeyle, 17'nin kazandıran sayı olduğunun fark edilmesinden sonra diğer kazandıran sayılar (14, 11, 8, 5, 2) sırasıyla ortaya çıkmamış, 14 ve 11 kazandıran sayılar olarak öne sürülünceye kadar uzunca bir zaman gerekmiştir. Bu hipotezlerin ortaya çıkması için öğrencilerin bazı hipotezleri çürütmeleri ve kaybettiren sayılarla ilgilenmeyi bir kenara bırakmaları gerekmiştir. Ortaya atılan hipotezlerin ispatlanması sürecinde ise, pragmatik ispat yöntemi olarak nitelendirilen ve oyun oynayarak tezini kabul ettirme veya karşı tarafın tezini çürütmeye dayanan yöntem yoğunlukla kullanılmıştır. Bu yöntem özellikle yanlış hipotezlerin çürütülmesi aşamasında başvurulmuştur. Bununla birlikte öğrenciler entelektüel ispat denilen, mantıksal argümanlarla bazı hipotezleri ispatlama veya çürütme yöntemine de başvurmuşlardır.

Bu uygulamada öğrencilerin stratejilerini, argümanlarını ve davranışlarını, dolayısıyla yaşadıkları matematiksel süreçleri etkilemiş olabilecek pek çok faktör olduğunu söylemek mümkündür. Bu faktörler ontolojik faktörler, pedagojik faktörler ve didaktik faktörler olmak üzere üç başlık altında incelenebilir:

### **Ontolojik Faktörler**

Ontolojik faktörler öğrencilerin psiko-genetik gelişimleriyle ilgili faktörler olup, öğrencilerin algısını, sözel ifadelerini, mantıksal çıkarımlarını ve benzeri davranışlarını belirleyen faktörlerdir. Ontolojik faktörlerin ilk olarak öğrencilerin geliştirdiği açıklamalar ve ispatlar üzerinde etkili olduğunu düşünmek mümkündür. Zira, yukarıda yer verilen pragmatik ispat bu yaş grubunun

geliştirebileceği en temel bir ispat yöntemi olarak kabul edilebilirken, lise öğrencileri için bir ispat yöntemi olarak kabul edilmeme ihtimali vardır. Ontolojik faktörlerin diğer yandan öğrencilerin kendilerinden beklenen görevi nasıl anladıklarını da etkilediği söylenebilir. Özellikle, kaybeden sayılara yoğunlaşma, isteyerek kaybetmek ile matematiksel bir zorunluluk olarak kaybetmek arasında ayırım yapılamaması gibi durumlar ontolojik faktörlerle açıklanabilir. Benzer durumların Brousseau'nun uygulamalarında da yaşandığı görülmektedir. Brousseau (1997), 20'den geriye doğru gidildiğinde yeni kazandıran sayıları keşfetmenin daha çok zaman alacağını, önceden ortaya çıkmış fikirlerin zamanla kaybolabileceğini, öğrencilerin ispat sürecinde sınıf içi dinamiğe bağlı olarak bazı bilişsel karmaşa yaşayabileceklerini belirtmektedir. Diğer yandan Brousseau, bazı öğrencilerin ana dile yeterince hakim olamamasından “yapmak istiyorum” ile “yapabilirim” arasındaki ayrımı veya “bir olayın kesinlikle olması” durumuyla “bir olayın olabilmesi” durumu arasındaki ayrımı tam olarak yapamayacaklarını belirtmektedir. Bu yönüyle etkinlik boyunca öğrencilerin göstermiş oldukları bazı davranışlar ve ortaya koymuş oldukları yaklaşım ve sonuçların, bir güçlük veya başarısızlık olarak değil, bu yaş seviyesinde beklenebilecek normal davranışlar, yaklaşım ve sonuçlar oldukları düşünülebilir.

### **Pedagojik faktörler**

Pedagojik faktörler çalışma ortamının genel şartları, öğretmen, öğrenciler arasındaki genel diyalog ve benzeri faktörler olarak düşünülebilir. Bu faktörlerden özellikle etkinlik yapılan yerin ve öğretmenin konumunun öğrencilerin eylemleri ve yaşadıkları bilişsel süreçleri etkilediği söylenebilir. Öğrencilerin kendi sınıflarında olmayıp, proje okuluna gelmiş olmaları, proje okulundaki çalışma düzeni, öğrenci sayısının azlığı gibi durumlar öğrencileri kendi matematik dersleri bağlamından çıkarıp daha çok etkileşim içinde olmalarını sağlamış olabilir. Benzer şekilde etkinlik öğretmenin kendi matematik öğretmenleri olmayışı ve öğrencilerden açıkça görünür matematiksel kazanımlar beklememesi öğrencilerin daha çok etkileşim içinde olmalarını ve fikirlerini özgürce ifade etmelerini olumlu yönde etkilemiş olabilir.

### **Didaktik faktörler**

Didaktik faktörler doğrudan öğretme-öğrenme süreci ile ilgili faktörler olarak nitelendirilebilir. Çalışmada bu faktörlerin başında etkinlik tasarımı gelmektedir. Bu tasarımın en önemli bileşeni ise oyun bağlamıdır. Oyun bağlamının öğrencilerin hipotez öne sürme ve ispatlama süreçlerini olumlu yönde etkilediği görülmektedir. Zira daha etkinliğin başında bir öğrencinin “hep oyun oynayalım” demesi ve tüm öğrencilerin etkinliğe ilgileri öğrencilerin bu bağlamın içine çabucak girdiklerini göstermektedir. Bununla birlikte, hedeflenen kazanımlara ulaşmak için oyun bağlamının yönetilmesi gereken bir bileşen olduğu açıktır. Bu uygulamada, öğretmenin başlangıçta öğrencilere karşı oynadığı üç oyunu da kazanacak şekilde oynaması etkili bir strateji olarak düşünülebilir. Zira bu durum karşısında öğrencilerin ifade ve hareketlerinden kazanmanın rastgele olmadığını fark ettikleri ve oyuna karşı ilgilerinin arttığı gözlemlenmektedir. Başka bir ifadeyle, öğretmenin öğrencilerle arasındaki “oyunu kazanmaya çalışmanızı ve

bunun için matematiksel stratejiler ve argümanlar geliştirmenizi istiyorum” şeklinde özetlenebilecek didaktik sözleşmeyi bu tarz stratejilerle yerleştirmeye çalıştığı söylenebilir. Diğer yandan, etkinlik ve bağlam ne kadar büyük bir potansiyele sahip olursa olsun, öğretmenin her an etkinliğin amaç ve içeriğinin değişmesine neden olması ihtimali vardır (Hiebert vd., 1996; Sensevy vd., 2005; Wallace & Even 2005; Wood, 1999). Örneğin, öğretmen her an, öğrenciler henüz hiç bir keşifte bulunmadan ve bilinçli stratejiler geliştirmeden, öğrencileri müdahaleleri ile üçer üçer geriye sayma kuralına yönlendirebilir (üç eksilttik 17’yi bulduk, 3 daha eksiltirsek kaç buluruz? gibi). Oysa, etkinliğin öğretmeni bu tarz açıklamalardan uzak durmayı başarabilmiş, benzer bir öneri öğrencilerden geldiğinde ise (H9), muhtemelen sınıfın henüz hazır olmadığını düşünerek, o öneriyi ertelemeyi tercih etmiştir. Benzer şekilde öğretmen etkinliğin tıkandığı yerlerde öğrencilere bazen tekrar oynamalarını önererek, bazen de kendisi bir öğrenciye karşı oyunu oynayarak etkinliği yönetmiştir. Bu yönüyle bakıldığında, öğretmenin ortama bilgi veya strateji enjekte etmediğini ve adidaktik ortamın doğasını bozabilecek müdahalelerden uzak durmayı başardığını söylemek mümkündür.

Bununla birlikte, öğretmenin bazı müdahalelerinin etkinliğin akışını yapay şekilde hızlandırdığı ve öğrencilerin yaşayacakları matematiksel süreçleri, zayıflattığı da görülmektedir. Örneğin öğretmen “ilk 17 diyen kazanır” ifadesinin hipotez olarak öne sürülmesini sağlamakla kalmamış aynı zamanda bu hipotezin doğrulanması sürecinde de müdahalede bulunmuştur. Bir öğrenciye hipotezini doğrulaması için fırsat vermekle birlikte, öğrenci argümanını tam olarak tamamlamadan ve sınıfa öğrencinin argümanına katılıp katılmadıklarını sormadan kendisi öğrencinin açıklamalarını yeniden formüle ederek bu hipotezin (sınıfça) ispatlanmış olduğunu kabul etmiştir. Öğretmen aynı yaklaşımı “ilk 14 diyen kazanır” ve “ilk 11 diyen kazanır” hipotezlerinde de sergilemiştir. Başka bir ifadeyle, öğrenciler eylem süreci yaşarken formüle etme sürecini, formüle etme süreci yaşarlarken de doğrulama sürecini yaşatmaya çalışmıştır.

Sonuç olarak, bu çalışmada ele alınan “Kim önce 20 diyecek ?” etkinliğinin bütününe bakıldığında DDT çerçevesinde beklenen adidaktik ortamın oluşturulabildiği görülmektedir. Öğretmen etkinliği sunuş ve yönetim şekliyle teorinin temel prensiplerine büyük oranda bağlı kalabilmiş, bilgiyi elinde tutan ve öğrencilerine sunan rolü yerine bilginin kaynağı olan ortamı hazırlayan ve olgunlaşmasını sağlayan rolünü üstlenebilmiştir. Bunun sonucunda öğrenciler etkinliğin başından sonuna kadar aktif bir katılım göstermişler, deneme-yanılma, bir durumu matematiksel olarak ifade etme, ispatlama, matematiksel iletişim ve paylaşım gibi farklı matematiksel süreçleri aynı bir etkinlik içinde yaşama imkanı bulmuşlardır.

Etkinliğin öğretmenin proje çerçevesinde verilen eğitim dışında DDT ile ilgili farklı bir bilgi ve uygulama tecrübesi olmadığı göz önüne alındığında bu tarz etkinliklerin normal sınıf ortamlarına kolaylıkla entegre edilebileceği düşünülebilir. Dolayısıyla bu çerçevede tasarlanacak etkinlikler aracılığıyla

ilköğretim seviyesinden başlamak üzere matematiksel süreçler öğrencilere yaşatılabilir ve matematik aktivitesinin temelleri kazandırılabilir.

## KAYNAKLAR

- Arsac, G., Germain, G. & Mante, M. (1991). *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics : Didactique des mathématiques, 1970-1990*. Kluwer Academic Publishers (Springer).
- Bybee, R., Taylor, J. A., Gardner, A., Van Scotter, P., Carlson, J., Westbrook, A. & Landes, N. (2006). *The BSCS 5E Instructional Model: Origins and Effectiveness*. Colorado Springs, CO: BSCS.
- Chatel, E. (2002), L'action éducative et la logique de la situation. Fondements théoriques d'une approche pragmatique des faits d'enseignement. *Revue française de pédagogie*, 141, 37-46.
- Erdoğan, A., Özdemir Erdoğan, E., Garan, O. & Güler, M. (2012). Matematiğin Popülerleştirilmesine Yönelik Tasarlanan Bir Eğitim-Öğretim Ortamının Değerlendirilmesi. *İlköğretim Online*, 11(1), 51-74. 24/09/2012 tarihinde <http://ilkogretim-online.org.tr> adresinden alınmıştır.
- Giusti, E. (1999). *La naissance des objets mathématiques*. Paris : Ellipses.
- Hiebert, J., Carpenter, T.P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., Olivier, A. & Wearne D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: the case of mathematics. *Educational Researcher*, 25(4),12-21.
- Mahammad, N. (1998). *Histoire des équations algébriques*. Paris : Diderot
- NCTM, (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA: Author.
- OECD, (2010). *PISA 2012 Mathematics Framework*. Retrieved September 24, 2012, from <http://www.oecd.org>.
- Ontario, (2005). *The Ontario Curriculum Grades 1-8: Mathematics, 2005 (revised)*. Retrieved September, 24, 2012, from <http://www.edu.gov.on.ca>
- Ross, D. (2008). Game Theory. In Zalta, E.N. (Eds.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Retrieved September 24, 2012, from <http://plato.stanford.edu/archives/spr2008/entries/game-theory/>.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Eds.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.
- Sensevy, G., Schubauer-Leoni, M.L., Mercier, A., Ligozat, F. & Perrot, G. (2005). An attempt to model the teacher's action in the mathematics class. In C. Laborde, M.-J. Perrin-Glorian & A. Sierpiska (Eds.), *Beyond the apparent banality of the mathematics classroom* (pp. 153-181), Springer.
- Thisse, J.-F. (2010). *Theori des jeux: une introduction* . Micro licence.
- Van de Walle, J. (2004). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Boston: Allyn and Bacon (5th).
- Wallace, T., & Even, R. (2005). Hearing students: the complexity of understanding what they are saying, showing and doing. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 393-417.
- Warfield, V.-M. (2006). *Invitation to didactique*. Retrieved September 24, 2012, from <http://www.math.washington.edu/~warfield/Inv%20to%20Did66%207-22-06.pdf>
- Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 171-191.



## SUMMARY

Nowadays, curricula insist more and more on conceptual knowledge, on the necessity to give sense to the activities carried out in class, besides, on the importance to create bonds between different topics, and even different disciplines. Such ambitions of the curricula have led, all around the world, to the development of new contents, methods and teaching strategies. Mathematical processes concept appeared in these circumstances. From NTCM standards up to OECD reports, the concept is often invoked. However, no definition is given in the literature and the concept is often explained following phases such as trial and error, conjecturing, proving, communication, etc. The aim of this paper is to clarify what mathematical processes concept could mean and how primary school students could get involved in these processes.

Theory of didactical situations was adopted as theoretical framework. Based on the constructivist movement, the theory of didactical situations (Brousseau, 1997) starts with the idea that teaching mathematics should be organized in a way that engages students in an authentic scientific activity allowing them to construct their knowledge. The theory emphasizes the necessity of three fundamental phases (action, formulation, validation) in which the students interact with a milieu specially designed as source of information. Modelling the teacher's and the students' roles in a specific way the theory seems to be an appropriate tool to involve students in mathematical processes.

The data of this study came from a funded project, called Mathematics School of Eskisehir. The project lasted two years and addressed primary school students in Eskisehir city (Erdogan et al., 2012). A specific environment was created for the project and a number of activities, mainly based on the theory of didactical situations, was carried out.

At the beginning of the project, a training was provided to the teachers involved. During this training, which lasted approximately twenty hours, the background, aims and design of the project were presented. The activities designed for students were given to the teachers for research and analysis. Students' potential reactions, strategies and difficulties were discussed together. The management of the activities and the role of the teacher during each activity were explained and discussed according to the theoretical background of the project. Group work was presented as a mean to develop interactions between students rather than between a student and the teacher. However, no written instruction was given to the teachers and it was expected that they integrate the content of the training in their teaching practices.

This study was based on an activity carried out in the project. The activity, which is called *the race to 20*, is a game based activity, experimented several times by Brousseau (1997). This activity was randomly selected between those conducted about at the middle of the project, after the teachers get accommodated in the

implementation of the project. The activity was conducted by a math teacher with five years teaching experience and participants were 20 fifth grade students from a school situated in the city centre.

The data analyzed were drawn from the video transcriptions of the activity. Two researchers first individually analysed the transcriptions. Then, the researchers analyzed the transcription together in the light of the video. These analyses were conducted according to the phases defined in the theory of didactical situations.

The results showed that the students were quickly involved in the activity and they actively participated about 75 minutes through trial and error, assumptions and attempt at proving or disproving. In total, the game was played 33 times. The students proposed 13 assumptions and they proved or disproved them. The proving and disproving process did not function in a linear way as well as the appearance of the assumptions. To prove or disprove some assumptions, more time was needed although some others were quickly proposed and proved. Three types of proof mentioned by Brousseau (semantic, pragmatic, intellectual) were also observed. Although the students mainly used pragmatic proof strategy some intellectual proofs were given for some assumptions.

During three fundamental phases of action, formulation and validation, many mathematical processes mentioned in the literature were observed although the students encountered some difficulties. This result could be interpreted according three types of factor likely to influence the students' and the teacher's work. The first factor is ontological, due to the students' psychogenetic level of development. As mentioned by Brousseau, the fact that some students insist on losing numbers and no on the winning numbers can be explained by the development of the ability to distinguish what will certainly happen and what could happen. The second is pedagogical, due to the work environment. Especially extra-school context of the project (absence of assessment, new teacher, classroom design, etc.) could support students' involvement. The third is didactical, directly linked to the teaching and learning design of the activity. Game context, role assigned to the teacher and the students, and teacher's successful management of the activity according to the main principles of the theory seem to have allowed the students to take an active part in the activity and to get involved in mathematical processes.